Université de Provence, Aix-Marseille I
UFR Mathématiques Informatique et Modélisation

Thèse

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Provence
en Mathématiques Appliquées,
Ecole doctorale de Mathématiques Appliquées,
présentée et soutenue publiquement
par

Alexis MONIER

le 7 janvier 2002

Titre :

Etude de certains Problèmes non linéaires

Directeur de thèse
Thierry GALLOUET

JURY :
M. Etienne PARDOUX, Président
M. Guy BOUCHITTE,
M. Pierre FABRIE, Rapporteur
M. Luigi ORSINA, Rapporteur

[...]

Mais, vrai, j'ai trop pleuré ! Les Aubes sont navrantes.
Toute lune est atroce et tout soleil amer :
L'âcre amour m'a gonflé de torpeurs enivrantes.
O que ma quille éclate ! O que j'aille à la mer !

Si je désire une eau d'Europe, c'est la flache
Noire et froide où vers le crépuscule embaumé
Un enfant accroupi plein de tristesses, lâche
Un bateau frêle comme un papillon de mai.

Je ne puis plus, baigné de vos langueurs, ô lames,
Enlever leurs sillages aux porteurs de cotons,
Ni traverser l'orgueil des drapeaux et des flammes,
Ni nager sous les yeux horribles des pontons.

Arthur RIMBAUD,
Le Bateau Ivre (extrait, la fin...)

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur, Thierry Gallouët, pour avoir accepté de diriger cette thèse. Sa passion communicatrice, la clarté de ses exposés et la pertinence de ses questions ont toujours su me motiver et me diriger. Il est difficile de réaliser combien ses qualités exceptionnelles d'enseignant-chercheur et humaines ont permis que cette thèse existe.

Je porte beaucoup d'admiration également pour les travaux de Pierre Fabrie et de Luigi Orsina, d'ailleurs largement cités dans ce mémoire. Ils m'ont fait le grand honneur de rapporter cette thèse et je les en remercie vivement.

Mes sincères remerciements vont aussi à Etienne Pardoux qui a accepté de présider ce jury. Je remercie également Guy Bouchitté pour sa présence et pour m'avoir le premier "initié" à la recherche, il y a de çà quelques années maintenant...

Pour l'intérêt porté à mon travail lors de leur nombreux séjours à Marseille, je tiens à remercier Robert Eymard et Alessio Poretta.

Toute ma sympathie se portent sur les membres du CMI qui participent à la bonne ambiance du laboratoire.

Parmis eux, j'adresse un merci particulier à Yves Dermenjian, Florence Hubert, Raphële Herbin et tous ceux qui ont partagé ou qui partagent encore le même bureau que moi. Je remercie tous les membres actifs passés, présents et à venir du CyberFoyer, association que j'ai eu la joie de créer avec Patrick Iglésias, que je remercie tout spécialement.

Enfin, toute ma reconnaissance va à Ibtissam pour sa patience, son soutien et son amour. Tu es "le sourire" de ma vie... Merci !

Table des matières

Introduction

Le titre vague de ce mémoire cache un thème bien précis : la résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles issus de la Mécanique des fluides dont les données sont des mesures vectorielles.

Depuis les années 50 et l'apparition des solutions "faibles" ou "variationnelles", les équations aux dérivées partielles (EDP) dites elliptiques, c'est-à-dire du type

$$-\mathrm{div}\,(A \text{ grad } u) = f,$$

sont relativement bien connues dans le cas où le second membre, la fonction f, est suffisament régulier. On rappelle qu'une telle équation est elliptique si la matrice A vérifie : il existe α et β, $0 < \alpha < \beta$ tel que $A \in M(\alpha, \beta)$ où $M(\alpha, \beta)$ est l'ensemble suivant

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta) = \{ A \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N} \ / \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \alpha |\xi|^2 \leq A(x)\xi.\xi \text{ et } |A(x)\xi| \leq \beta |\xi| \text{ p.p. } x \in \Omega \}. \end{aligned}$$

Le cadre agréable d'étude du problème de Dirichlet pour cette équation ($u = 0$ sur le bord) devient l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (où Ω est le domaine étudié) et la technique de résolution consiste à se ramener au Théorème de représentation de Riesz d'une application linéaire continue (si A est symétrique). Il est donc nécessaire que la fonction f appartienne au dual de $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace $H^{-1}(\Omega)$. La question que l'on peut se poser alors est : que se passe-t-il quand l'on sort de ce cadre d'étude ?

Cette question, en dehors de son intérêt mathématique évident, est également motivée par de nombreuses applications. La première application que je citerai est l'exploitation d'un gisement de pétrole. Un réservoir pétrolier est une formation du sous-sol, poreuse et perméable, dont les contours sont limités par des barrières imperméables. Afin de récupérer les hydrocarbures en place, les pétroliers forent des puits de production et d'injection. Le diamètre d'un puit est de l'ordre de 10cm, ce qui est très faible comparé à la taille du réservoir (jusqu'à plusieurs dizaines de kilomètres) et même comparé à la taille d'une maille pour une discrétisation raisonnable (de l'ordre de 10 à 100m). On est donc amené à considérer l'action des puits comme une mesure dont le support est réduit à un point en dimension 2 et à une ligne en dimension 3.

Dans un autre domaine, la météorologie, le travail des prévisionnistes consiste à résoudre numériquement des systèmes d'EDP déduit de la mécanique des fluides, assez proches du système de Navier-Stokes. Pour faire une bonne prévision, il faut non seulement résoudre précisément ce système d'évolution, mais aussi construire correctement la condition initiale à l'aide des observations effectuées par les différents instruments de mesure (station au sol, radio-sondages, bouées dérivantes, satellites), qui sont le plus souvent très localisés. Une fois de plus, il peut être intéressant de donner directement un sens à ces équations avec des données singulières, autrement dit des mesures vectorielles.

Avant de donner plus de détails sur la contribution de cette thèse aux problèmes cités précédemment, je voudrais rappeler les différentes techniques existantes pour la résolution d'équations aux dérivées partielles avec données mesures.

Les problèmes à données mesures

La première idée pour résoudre ce type de problème est due à G. Stampacchia en 1965. Dans l'article [56], il démontre la régularité de la solution d'un problème de Dirichlet pour une équation elliptique à coefficients discontinus : si le second membre est dans l'espace de Sobolev $W^{-1,p}(\Omega)$ avec $p > N$, N étant la dimension, alors la solution est continue sur $\overline{\Omega}$. Ce résultat permet par un argument de dualité de prouver l'existence et l'unicité d'une solution aux problèmes de Dirichlet avec second membre mesure.

La deuxième idée consiste à passer à la limite sur un problème régulier. Cette méthode est due à L. Boccardo et T. Gallouët dans un article de 1989, [14], et a été développée depuis dans de nombreux articles. Les auteurs approchent dans un premier temps convenablement le second membre mesure par des fonctions régulières. Ils utilisent ensuite la technique des troncatures pour obtenir des estimations sur la solution du problème régularisé ne faisant intervenir que la norme L^1 du second membre. Ils démontrent ainsi en passant à la limite directement dans l'équation, l'existence d'une solution aux problèmes elliptiques avec second membre mesure.

L'avantage de la formulation obtenue est qu'elle est très proche de la formulation variationnelle dont on a l'habitude. Cette technique a également le grand avantage de n'être pas limitée au cas linéaire, et s'étend aussi aux problèmes paraboliques (voir les articles [14], [15] et [16]). L'inconvénient est qu'il n'y a pas unicité de la solution pour cette formulation (voir [52] et [48]). Pour obtenir l'unicité, il est nécessaire de rajouter des hypothèses sur la mesure ou de sélectionner une solution à l'aide de conditions supplémentaires dans la formulation (un peu à la façon dont les entropies de Krushkov permettent d'obtenir l'unicité pour les équations hyperboliques). Là encore de nombreux articles traitent de ce sujet :
- En dimension deux, le résultat de régularité de Meyers permet d'obtenir l'unicité, voir [33].
- Si le second membre est dans $L^1(\Omega)$, plusieurs formulations permettent d'obtenir l'unicité : les solutions entropiques, dans les articles [17] et [12], et les solutions renormalisées, voir principalement l'article [25].
- Il existe également des résultats d'unicité de la "SOLA", qui est l'abréviation de Solution Obtained as the Limit of Approximations. Si la formulation de l'article

[14] ne permet pas d'avoir l'unicité, les solutions approchées convergent toujours vers la même limite (voir [24] et plus récemment [27]).

Cette question de l'unicité est très importante dans ce mémoire. En effet, il s'agit de résoudre des systèmes couplés. Pour pouvoir utiliser une technique de point fixe, ou pour avoir des résultats de stabilité sur une des équations, il est nécessaire d'avoir un résultat d'unicité.

Enfin, la plus grande partie des résultats que nous venons de rappeler ont surtout été développés pour le problème de Dirichlet, et les problèmes d'écoulements font plutôt intervenir des conditions limites naturelles, du type Neumann. Une partie de ce travail a donc consisté à étendre certains théorèmes connus lorsque les conditions limites sont celles de Neumann.

Plan du mémoire.

Le premier sujet abordé dans ce mémoire est l'étude des systèmes modélisants des écoulements diphasiques en milieu poreux, du type eau-huile, dont les termes sources sont modélisés par des mesures. Ils s'agit de systèmes couplés dont les inconnues sont la saturation d'une des phases, u, et la “pression” P. Les conditions limites sont du type Neumann.

Les systèmes s'écrivent sensiblement tous sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_t - \mathrm{div}\,(f(u)K(\nabla P - \rho G)) - \mathrm{div}\,(K\nabla\varphi(u)) = ca\mu - ub\mu, \\ -\mathrm{div}\ (m(u)K\,(\nabla P - F(x,u))) = a\mu - b\mu. \end{cases}$$

Il faut distinguer trois systèmes de nature mathématique très différente selon le cas considéré (écoulement miscible ou immiscible, présence de pression capillaire ou non, etc). Cela se traduit dans le système par une fonction φ très différente. Ainsi, si la pression est toujours solution d'une équation elliptique, la saturation u vérifie une équation d'évolution qui peut être parabolique (on prend $\varphi(u) = u$), parabolique dégénérée (cette fois la dérivée de la fonction φ peut s'annuler en certains points) ou même hyperbolique ($\varphi = 0$).

Le **premier chapitre** est consacré à la généralisation du Théorème de régularité de Meyers aux conditions limites de Neumann. Dans l'article [42], N. G. Meyers s'intéresse au problème de Dirichlet pour une équation elliptique à coefficient discontinu, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A \text{ grad } u) = f, \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $A \in M(\alpha,\beta)$, $0 < \alpha < \beta$, et Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^2$. Il démontre qu'il existe un réel $p_0 > 2$, tel que la restriction T_p de l'application T qui à tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ associe la solution u du problème de Dirichlet considéré, est linéaire continue de $W^{-1,p}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout p, $2 \le p < p_0$.

Nous démontrons que ce théorème de régularité peut être généralisé pour d'autres conditions aux bords, principalement Neumann et Fourier, et pour des domaines à frontière lipschitzienne. Ce résultat est ensuite appliqué pour démontrer l'unicité (à une constante près) de la solution d'une équation elliptique avec condition de Neumann et données mesures en dimension 2.

Le **deuxième chapitre** concerne directement l'étude des écoulements diphasiques en milieu poreux. Après quelques mots sur la modélisation mathématique de ces écoulements, nous rappelons les résultats d'existence de solutions faibles pour ces modèles, avec termes sources mesures, établis par P. Fabrie et T. Gallouët dans l'article *Modeling wells in porous media flow*, [31].

Pour résoudre le système couplé, les auteurs commencent par résoudre un système régularisé, et grâce à un résultat de stabilité de la pression et aux estimations obtenues sur la saturation, ils passent à la limite dans le système. Pour obtenir l'unicité et par suite, la stabilité forte de la pression, il y a trois possibilités :

1. Si la mesure est L^1, utiliser les notions de solutions entropiques ou renormalisées.
2. Utiliser la formulation par dualité due à G. Stampacchia.
3. Enfin, supposer que la mesure μ appartient à $(W^{1,q})'$ pour tout $q > 2$, et utiliser le Théorème de Meyers pour la condition de Neumann établi dans le chapitre 1.

On rappelle que la mesure modélise l'action des puits de forage et d'injection. Son support est donc réduit à un point en dimension 2 et à une ligne en dimension 3. La première possibilité est donc exclue.

Les auteurs de [31] ont choisi la troisième possibilité. Nous montrons dans le chapitre 2 que l'on peut s'affranchir de l'hypothèse supplémentaire sur la mesure en démontrant l'existence d'une solution très faible pour ces systèmes, utilisant la formulation de Stampacchia pour l'équation en pression.

De plus, nous détaillons la démonstration du résultat d'existence pour le système modélisant un écoulement immiscible avec pression capillaire, c'est-à-dire quand l'équation de la saturation est parabolique dégénérée. Cette difficulté supplémentaire complique effectivement la résolution du système. En particulier, la compacité forte de la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^2((0,T),H^1(\Omega))$ est obtenue grâce à une estimation des translations en temps.

Enfin, le chapitre 2 se termine sur l'étude brève du système couplé elliptique-hyperbolique (cas $\varphi = 0$). En effet, l'existence d'une solution faible pour ce problème, même quand les termes sources sont supposés réguliers, reste une question ouverte, à ma connaissance. Les techniques habituelles de résolution d'une équation hyperbolique consistant à rajouter de la diffusion, que ce soit sous forme d'un Laplacien dans l'équation continue, ou sous forme numérique en faisant un schéma, ne permettent pas de conclure. Par exemple, l'équation en pression, *a priori* plus simple, n'a aucune chance d'être vérifiée à la limite si on se contente d'une convergence faible pour la saturation.

Le **troisième chapitre** est consacré à l'étude de l'homogénéisation pour les systèmes introduit dans le chapitre 2. Cette question est effectivement très intéressante d'un point de vue pratique pour la simulation de réservoir. La matrice de perméabilité qui décrit le milieu poreux présente en général de fortes hétérogénéités. Cela peut poser des problèmes lors de la discrétisation. On décrit un phénomène intéressant en dimension 1 : l'approximation de la solution u_ε pour le problème présentant de fortes hétérogénéités n'approche pas très bien u_ε, alors que l'approximation de la solution du problème homogénéisé approche mieux u_ε ! L'homogénéisation consiste donc à savoir si l'on peut remplacer cette matrice de perméabilité par une matrice homogène sans faire trop d'erreur...

La réponse apportée dans ce mémoire est très théorique : on considère une matrice de perméabilité K_ε qui dépend d'un petit paramètre ε. On démontre que le problème peut s'approcher par un problème analogue où la matrice considérée est la H-limite de la suite $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ quand $\varepsilon \to 0$. Le problème est que la notion de H-convergence n'est pas constructive.

Avant de décrire plus précisément les résultats obtenus, rappelons la notion de H-convergence. Elle est due à L. Tartar et F. Murat (voir [43], [45] et [57]). Il s'agit d'une généralisation au cas non symétrique de la G-convergence introduit par S. Spagnolo dans [55]. La définition que nous donnons est en fait légèrement différente :

Définition (H-convergence "simple") *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $M(\alpha,\beta)$, pour α et β donnés, $\beta > \alpha > 0$, et A un élément de $M(\alpha,\beta)$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-converge vers A (on note $A_n \overset{H}{\rightharpoonup} A$) si pour tout f dans $H^{-1}(\Omega)$, la solution u_n de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A_n \nabla u_n) = f \text{ dans } \Omega, \\ u_n \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

vérifie

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible quand } n \to \infty, \\ A_n \nabla u_n \rightharpoonup A\nabla u \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible quand } n \to \infty, \end{cases}$$

où u est l'unique solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A \nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Le résultat principal de la H-convergence est la compacité de l'ensemble $M(\alpha,\beta)$: pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M(\alpha,\beta)$, il existe $A \in M(\alpha,\beta^2/\alpha)$ et une sous-suite de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui H-converge vers A.

La question de l'homogénéisation peut également être vu comme un résultat de stabilité. C'est d'ailleurs dans ce contexte, pour étudier le système couplé elliptique-hyperbolique évoqué au chapitre 2, que je me suis intéressé à la H-convergence.

L'homogénéisation pour les systèmes modélisant des écoulements diphasiques en milieu poreux dont les termes sources sont des mesures présente deux difficultés majeures : la présence d'une équation parabolique dégénérée pour les écoulements immiscibles, et surtout les termes sources mesures. Nous présentons donc dans un premier temps une étude séparée de l'homogénéisation pour des équations paraboliques dégénérées et des problèmes de Neumann à données mesures (l'équation de la pression...)

Nous donnons finalement la démonstration du résultat de l'homogénéisation pour les deux systèmes modélisant des écoulements miscible et immiscible.

Le **quatrième et dernier chapitre** est consacré à la résolution du problème de Stokes avec données mesures. La motivation initiale, comme nous l'avons déjà signalée, était de résoudre le système de Navier-Stokes. Le principal résultat de ce chapitre est le théorème suivant

Théorème (Stokes mesure) *Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout μ appartenant $(\mathcal{M}(\Omega))^N$, il existe une unique solution faible (u, P) (P est unique à une constante près) au problème de Stokes stationnaire avec μ pour second membre, au sens suivant :*

$$\begin{gathered}
u \in V_p = \{v \in (W_0^{1,p}(\Omega))^N \ \textit{tel que} \ \mathrm{div}\,(v) = 0\}, \ \forall p \in \left[1, \tfrac{N}{N-1}\right), \\
P \in L^p(\Omega), \ \forall p \in \left[1, \tfrac{N}{N-1}\right), \\
\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla v_i(x) \ dx = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i(x)\, d\mu_i(x), \ \forall v \in V_q, \ \forall q > N, \\
-\Delta u + \nabla P = f \ \textit{au sens des distributions dans } \Omega.
\end{gathered}$$

Enfin, nous présentons en **annexe** un petit cours sur les problèmes à données mesures, fortement inspiré d'un cours de DEA de T. Gallouët, donné sur le sujet à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon en 1997. Nous donnons également la démonstration originale du Théorème de Meyers, et quelques informations sur la démonstration du Théorème d'Agmon-Douglis-Nirenberg dans un cas simple.

Conclusion et Perspectives.

Deux questions ouvertes sont les fils conducteurs de cette thèse. La première concerne l'existence d'une solution faible pour le modèle d'écoulement diphasique en milieu poreux, du type eau-huile, pour lequel le système est constitué d'une équation hyperbolique et d'une équation elliptique. La deuxième question est la résolution du système de Navier-Stokes avec second membre mesure.

Ces deux questions sont évidemment très difficiles et mon travail a surtout consisté à explorer les différentes méthodes développées récemment pouvant fournir des élements de réponses.

Si la première question semble insoluble pour le moment, nous travaillons actuellement avec P. Fabrie sur la deuxième et quelques résultats semblent déjà acquis (principalement, l'existence locale en temps en dimension 2).

Chapitre 1

On the regularity of solutions to elliptic equation

Article publié dans la revue Rendiconti di Matematica, Série VII, Volume 19, Roma (1999), 471-488.

Résumé

Nous démontrons que le théorème de régularité de Meyers pour des équations elliptiques à coefficients discontinus et condition aux bords de Dirichlet peut être généralisé pour d'autres conditions aux bords (Neumann, Fourier) et pour des domaines à frontière lipschitzienne. Ce résultat est ensuite appliqué pour démontrer l'unicité (à une constante près) de la solution d'une équation elliptique avec condition de Neumann et données mesures.

1.1 Introduction

In this paper, we prove that the $W^{1,p}$-estimate, $p > 2$, of any solution to the Dirichlet problem for a linear elliptic equation with discontinuous coefficients, due to N.G. Meyers [42] can be generalized to other boundary conditions, and for an open set with a Lipschitz continuous boundary. For regular operator in Lipschitz domains, G. Savaré obtain optimal regularity results in [51]. In [36], Konrad Gröger shows the result for a mixed boundary value problem, by using a fixed-point technique (he cannot mimic Meyers' proof for he's interested in monotonous non-linear operators).

Our proof works differently and very simply. The technique is to reduce the problem, by using local coordinates and reflection arguments, to a Dirichlet problem in a ball and to apply known results.

This paper is organized as follows. In section 2, we introduce our notations and recall Meyers' Theorem. Section 3 is devoted to the study of Neumann problem. Section 4 is devoted to other boundary condition, mainly Fourier condition and the mixed boundary value problem. The last section is about an application of our main result, namely, the uniqueness (up to a constant) of the weak solution of Neumann problem for a linear elliptic equation, in a bounded connected open set of $\mathbb{R}^2$, whose right-hand side is a measure.

1.2 Definitions and Preliminary Results

Let Ω be a bounded connected open set of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. $\mathbb{R}^N$ is considered with its euclidean norm, denoted $|.|$ and $\,.\,$ denotes the inner product. We consider the following linear elliptic equation

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u(x)) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1.2.1}$$

where A is an element of $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$ which satisfies the following condition (ellipticity and boundedness) :

$$\begin{aligned} \exists\ \alpha, \beta > 0 \ \text{ such that } \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \alpha|\xi|^2 \leq A(x)\xi.\xi \\ \text{for a.e. } x \in \Omega, \ \text{ and } \|A\|_\infty \leq \beta, \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

and f is a given function. We start from the following result, due to N.G. Meyers [42], for Dirichlet problem, if the boundary of Ω is smooth enough.

Theorem 1 (Meyers) *Let Ω be a bounded connected open set of C^2-class and A in $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$ satisfy (1.2.2). There is a real number p_0, $p_0 > 2$, such that if u is the weak solution of (1.2.1),* i.e.

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)\ dx = \langle f, \varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

and f belongs to $W^{-1,p}(\Omega)$, $p \in [2, p_0[$, then $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ and there is a $C(p)$ such that

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq C(p)\|f\|_{W^{-1,p}}.$$

Moreover, p_0 only depends on A and Ω and $C(p)$ on A, Ω and p, not on f.

The proof of this theorem uses a regularity theorem of Agmon-Douglis-Nirenberg (see [2] and [3]), and in particular the open set needs to be regular enough (of C^2-class is sufficient). Here, a simplified version of this theorem is only needed thereafter, the open set considered being a ball centered on zero with radius $R > 0$. Indeed, for an open set with Lipschitz continuous boundary, we use local maps and reflection to get back to a Dirichlet problem on the unit ball. Furthermore, our method works also for a large choice of boundary conditions. So let us recall a definition of an open set with Lipschitz continuous boundary.

Definition 1.2.1 *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded open set. Its boundary $\partial\Omega$ is Lipschitz continuous if, for all $a \in \partial\Omega$, there exists an orthonormal coordinates system $\mathcal{R}_a$, a neighbourhood of a, $V = \prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[= V' \times]\alpha, \beta[$ in these coordinates, and a Lipschitz continuous function $\eta : V' \to]\alpha, \beta[$ such that*

$$\begin{gathered} V \cap \Omega = \{(y', y_N) \in V \mid y_N > \eta(y')\}, \\ V \cap \partial\Omega = \{(y', \eta(y'))\,,\ y' \in V'\}. \end{gathered}$$

With this definition, we can prove the following proposition, where $B = \{x \in \mathbb{R}^N,\ |x| < 1\}$.

Proposition 1.2.1 *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded open set with a Lipschitz continuous boundary. Then there exists a family $(U_0,\ U_1,\ \dots,\ U_k)$ of open sets of $\mathbb{R}^N$, satisfying*

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{k} U_i,\ \overline{U}_0 \subset \Omega, \tag{1.2.3}$$

and $(J_1,\ \dots,\ J_k)$ functions such that for $i = 1,\ \dots,\ k$, $J_i : U_i \to B$ is an homeomorphism, J_i and J_i^{-1} are Lipschitz continuous and

$$\begin{gathered} J_i(U_i \cap \Omega) = B \cap \{(x', x_N) \mid x' \in \mathbb{R}^{N-1},\ x_N > 0\} = B_+, \\ J_i(U_i \cap \partial\Omega) = B \cap \{(x', 0) \mid x' \in \mathbb{R}^{N-1}\} = B^{N-1}. \end{gathered} \tag{1.2.4}$$

Remarks :

1. This definition of Lipschitz continuous boundary allows us to define properly the outward normal of Ω and to integrate on the boundary. That is actually necessary in section 4 for the Fourier condition.
2. Because the Rademacher Theorem, it is possible to make a change of variable with Lipschitz continuous functions. Indeed, if J is a Lipschitz continuous homeomorphism, mapping an open set U onto an open set V, the Jacobian matrix of J, denoted $\mathrm{D}J$, is defined almost everywhere and we have the classical formulae of change of variable (see [10] or [28]).
   Moreover, if J^{-1} is Lipschitz continuous too, the operator $T_J : W^{1,p}(V) \to W^{1,p}(U)$, defined by $T_J(u) = u \circ J$, is linear continuous. The norm of T_J only depends on the "Lipschitz contents" of J and J^{-1} and N.

Let us finally set $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ if $N > p$ and $p^* = \infty$ if $N \leq p$.

1.3 Meyers' Theorem for Neumann Problem

Let Ω be bounded connected open set of $\mathbb{R}^N$, with a Lipschitz continuous boundary. Let us consider the Neumann problem for the equation (1.2.1) where A satisfies conditions (1.2.2).
Define

$$H^1_*(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \int_\Omega u(x)dx = 0\}.$$

A weak formulation of this problem is expressed by

$$\begin{cases} u \in H^1_*(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)\ dx = \langle f, \varphi\rangle_{(H^1)', H^1}, \forall \varphi \in H^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.3.1}$$

where f is in $(H^1(\Omega))'$ with $\langle f, 1\rangle_{(H^1)',H^1} = 0$ (note that this condition is necessary to obtain a solution of (1.3.1)). By the Lax-Milgram theorem and the Poincaré inequality with a null mean, there exists a unique solution u in $H^1_*(\Omega)$ to (1.3.1).
If f belongs to $(W^{1,q}(\Omega))'$, with $p > 2$ and $q = p/(p-1)$, there is u in $H^1_*(\Omega)$ solution to (1.3.1) (indeed $(W^{1,q}(\Omega))' \subset (H^1(\Omega))'$). The following theorem improves the regularity of u.

Theorem 2 (Meyers Neumann) *Let Ω be a bounded connected open set of $\mathbb{R}^N$, with a Lipschitz continuous boundary. Let A in $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$ satisfy (1.2.2). For $p \geq 2$ and $q = p/p-1$, let T_p be the operator defined by $T_p(f) = u$, for all $f \in (W^{1,q}(\Omega))'$, with $\langle f, 1\rangle_{(H^1)',H^1} = 0$, where u is the unique solution to (1.3.1). Then, there is a real number p_M, $2 < p_M < 2^*$, such that, for all p, $2 < p < p_M$, the operator T_p is linear continuous from $(W^{1,q}(\Omega))'$ to $W^{1,p}(\Omega)$. Moreover, the norm of T_p only depends on p, α, β and Ω and p_M on α, β and Ω, not on f.*

Proof. Let p be fixed as greater than or equal to 2 and less than 2^*. Let $f \in (W^{1,q}(\Omega))'$. As previously seen, we can consider $u = T_p(f)$. So, u belongs to $H^1_*(\Omega)$.

Step 1 (Localization) Let us now consider a set of local maps, given by the proposition 1.2.1. We associate a partition of unity $(\theta_i)_i$ to the open sets $(U_i)_{i=0,\ ...,\ k}$; that is, functions $\theta_0,\ \theta_1,\ ...,\ \theta_k$ of $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ such that

$$0 \leq \theta_i \leq 1,\ \forall i = 0,\ 1,\ ...,\ k \text{ and } \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 1 \text{ on } \overline{\Omega},$$

and

$$\operatorname{supp}\theta_i \text{ is compact and included in } U_i,\ \forall i = 0,\ ...,\ k.$$

Let then

$$u_i = \theta_i u.$$

For all $\varphi \in H^1(\Omega)$, u_i satisfies

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A\nabla u_i.\nabla\varphi\, dx &= \int_\Omega \theta_i A\nabla u.\nabla\varphi\, dx + \int_\Omega uA\nabla\theta_i.\nabla\varphi\, dx \\
&= \int_\Omega A\nabla u.(\nabla(\theta_i\varphi) - \varphi\nabla\theta_i)dx + \int_\Omega uA\nabla\theta_i.\nabla\varphi\, dx \\
&= \langle \theta_i f - \mathrm{div}\,(uA\nabla\theta_i) - A\nabla u.\nabla\theta_i, \varphi\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

where $\langle \theta_i f, \varphi\rangle = \langle f, \theta_i\varphi\rangle$ and, if a function F belongs to $(L^2)^N$, let

$$\langle -\mathrm{div}\,(F), \varphi\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)} = \int_\Omega F(x).\nabla\varphi(x)dx.$$

To define properly a linear form f_i on $H^1(U_i\cap\Omega)$, let us consider a function γ of $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ such that $\mathrm{supp}\,\theta_i \subset \mathrm{supp}\,\gamma \subset U_i$ and $\gamma(x) = 1$ on $\mathrm{supp}\,\theta_i$. For all function φ in $H^1(U_i\cap\Omega)$, we define f_i

$$\langle f_i, \varphi\rangle_{(H^1(U_i\cap\Omega))',H^1(U_i\cap\Omega)} = \langle \theta_i f - \mathrm{div}\,(uA\nabla\theta_i) - A\nabla u.\nabla\theta_i, \gamma\varphi\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)},$$

where $\gamma\varphi$ is the function extended by zero on Ω. So, we have got for all $\varphi \in H^1(U_i\cap\Omega)$

$$\int_{U_i\cap\Omega} A\nabla u_i.\nabla\varphi\, dx = \langle f_i, \varphi\rangle_{(H^1(U_i\cap\Omega))',H^1(U_i\cap\Omega)}.$$

Of course $\theta_i f$ is in $(W^{1,q}(U_i\cap\Omega))'$ and we have $\|\theta_i f\|_{(W^{1,q})'} \le C_{\theta_i}\|f\|_{(W^{1,q})'}$.
If u belongs to $H^1(\Omega)$, then $A\nabla u.\nabla\theta_i$ belongs to L^2. According to Sobolev's injection theorem, a function L^2 is also in $(W^{1,q})'$ if $q^* > 2$, *i.e.* $p < 2^*$. By the continuity of the Sobolev imbedding,

$$\|A\nabla u.\nabla\theta_i\|_{(W^{1,q})'} \le C_0\|u\|_{H^1} \le C_1\|f\|_{(H^1)} \le C_2\|f\|_{(W^{1,q})'}.$$

In the same way, $\mathrm{div}\,(uA\nabla\theta_i)$ belongs to $(W^{1,q}(U_i\cap\Omega))'$ if $uA\nabla\theta_i$ is in $(L^p)^N$ (*i.e.* $p < 2^*$), and

$$\|\mathrm{div}\,(uA\nabla\theta_i)\| \le C_0'\|u\|_{(L^p)^N} \le C_1'\|u\|_{H^1} \le C_2'\|f\|_{(W^{1,q})'}.$$

Finally f_i is in $(W^{1,q}(U_i\cap\Omega))'$ and there exists a real M_i positive such that

$$\|f_i\|_{(W^{1,q})'} \le M_i\|f\|_{(W^{1,q})'}.$$

Interior estimates. Consider first u_0.
Let B_R a ball with radius R large enough to allow $U_0 \subset B_R$ (Ω is bounded...). With the function γ used before we can also extend f_0 on $H_0^1(B_R)$. We extend u_0 by zero outside U_0. Then, u_0 is a solution of the following problem

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{B_R} A\nabla u_0.\nabla\varphi\, dx = \langle f_0, \varphi\rangle_{H^{-1}(B_R),H_0^1(B_R)}, \forall\varphi \in H_0^1(B_R), \\ u_0 = 0, \ \text{on } \partial B_R. \end{cases}$$

Note that f_0 is in $W^{-1,p}(B_R)$. Hence, according to Meyers' Theorem, there is a $2^* > p_0 > 2$, such that, if $p \in [2, p_0[$, then $u_0 \in W_0^{1,p}(B_R)$, and even in $W_0^{1,p}(U_0)$, by definition of θ_0. Moreover, there is a real positive $C_0(p)$ such that

$$\|u_0\|_{W_0^{1,p}} \leq C_0(p)\|f_0\|_{(W^{1,q})'} \leq M_0 C_0(p)\|f\|_{(W^{1,q})'},$$

$C_0(p)$ and p_0 only depends on α, β and Ω, not on f.

Estimates near the boundary. Let us now consider $v = u_i$ and $g = f_i$, for a fixed i. We will avoid recalling indices i throughout this proof. As seen previously, v satisfies

$$\int_{U\cap\Omega} A\nabla v.\nabla\varphi \, dx = \langle g, \varphi\rangle_{(H^1(U\cap\Omega))', H^1(U\cap\Omega)}, \forall\varphi \in H^1(U\cap\Omega),$$

where the mapping g is an element of $(W^{1,q}(U\cap\Omega))'$ (where $q = p/p-1$), as soon as $p < 2^*$.

Step 2 (Transport) Now, we make the change of variable $y = J(x)$, where J is the Lipschitz continuous function given by Proposition 1.2.1. Let $H = J^{-1}$. $\mathrm{D}J$ (resp. $\mathrm{D}H$) denotes the Jacobian matrix of J (resp. H), *i.e.* the matrix with general term $\partial J_i/\partial x_j$. ${}^tM$ denotes the transpose matrix of the matrix M. Let $w(y) = v \circ H(y)$, for all $y \in B_+ = \{x \in \mathbb{R}^N,\ |x| < 1,\ x_N > 0\}$. Let $\psi \in H^1(B_+)$, and $\varphi = \psi \circ J$. Then,

$$\nabla v(x) = {}^t\mathrm{D}J(x)\nabla w(J(x)), \text{ and } \nabla\varphi(x) = {}^t\mathrm{D}J(x)\nabla\psi(J(x)).$$

Hence,

$$\begin{aligned} A(x)\nabla v(x).\nabla\varphi(x) &= A(x){}^t\mathrm{D}J(x)\nabla w(J(x)).{}^t\mathrm{D}J(x)\nabla\psi(J(x)) \\ &= \mathrm{D}J(x)A(x){}^t\mathrm{D}J(x)\nabla w(J(x)).\nabla\psi(J(x)). \end{aligned}$$

Let

$$\Lambda(y) = |\det\ \mathrm{D}H(y)|\ \mathrm{D}J(H(y))A(H(y)){}^t\mathrm{D}J(H(y)). \tag{1.3.2}$$

According to the formulae of change of variable, we have

$$\int_{U\cap\Omega} A(x)\nabla v(x).\nabla\varphi(x) \, dx = \int_{B^+} \Lambda(y)\nabla w(y).\nabla\psi(y) \, dy$$

The mappings J and H both are Lipschitz continuous, hence the Jacobian matrices and $|\det\ \mathrm{D}H|$ are bounded with respect to the supremum norm. Hence, the matrix Λ is in $(L^\infty(B_+))^{N\times N}$.

Λ also satisfies the uniform ellipticity condition. Indeed, there exist reals m, M such that

$$m \leq |\det\ \mathrm{D}H(y)| \leq M, \text{ a.e. on } B_+$$

and

$$m|\xi|^2 \leq |{}^t\mathrm{D}J(H(y))\xi|^2 \leq M|\xi|^2, \forall\xi \in \mathbb{R}^N, \text{ a.e. on } B_+. \tag{1.3.3}$$

Then, for all $\xi \in \mathbb{R}^N$ and almost everywhere on B_+, because

$$\begin{aligned}\Lambda(y)\xi.\xi &= |\det \mathrm{D}H(y)|\ \mathrm{D}J(H(y))A(H(y))^t\mathrm{D}J(H(y))\xi.\xi \\ &= |\det \mathrm{D}H(y)|\ A(H(y))^t\mathrm{D}J(H(y))\xi.^t\mathrm{D}J(H(y))\xi,\end{aligned}$$

there exist α' and β', only depended on α, β, m and M, such that Λ satisfies

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \alpha'|\xi| \leq \Lambda(y)\xi.\xi \text{ and } \|\Lambda\|_\infty \leq \beta'.$$

The operator g is carried out as an operator h of $(W^{1,q}(B_+))'$. One can describe that operator thanks to g and the function H. Indeed, if g is an element of $(W^{1,q}(\Omega \cap U))'$, there exist function g_0 in $L^p(\Omega \cap U)$ and G in $(L^p(\Omega \cap U))^N$ such that, for all φ in $W^{1,q}(\Omega \cap U)$,

$$\langle g, \varphi\rangle_{(W^{1,q}(U\cap\Omega))',W^{1,p}(U\cap\Omega)} = \int_{\Omega\cap U} g_0(x)\varphi(x)\ dx + \int_{\Omega\cap U} G(x).\nabla\varphi(x)\ dx.$$

Hence, for all $\psi \in H^1(B_+)$, $\varphi = \psi \circ J$,

$$\begin{aligned}\langle g, \varphi\rangle &= \int_{\Omega\cap U} g_0(x)\varphi(x)\ dx + \int_{\Omega\cap U} G(x).^t\mathrm{D}J(x)\nabla\psi(J(x))\ dx \\ &= \int_{B^+} |\det \mathrm{D}H|\ g_0(H(y))\psi(y)dy \\ &\qquad + \int_{B^+} |\det \mathrm{D}H|\ \mathrm{D}J(H(y))G(H(y)).\nabla\psi(y)\ dy \\ &= \langle h, \psi\rangle.\end{aligned}$$

The function $|\det \mathrm{D}H|\ g_0(H(y))$ belongs to $L^p(B_+)$ and $|\det \mathrm{D}H|\ \mathrm{D}J(H(y))G(H(y))$ to $(L^p(B_+))^N$. Thus $h \in (W^{1,q}(B_+))'$ and it is easy to see that

$$\|h\|_{(W^{1,q})'} \leq C\|g\|_{(W^{1,q})'},$$

with $C > 0$. Finally, the function w is the solution to the new problem

$$\left\{\begin{array}{l} w \in H^1(B_+), \\ \displaystyle\int_{B^+} \Lambda(y)\nabla w(y).\nabla\psi(y)\ dy = \langle h, \psi\rangle_{(H^1)',H^1}, \forall \psi \in H^1(\Omega), \end{array}\right. \tag{1.3.4}$$

where Λ is defined by (1.3.2), and h belongs to $(W^{1,q}(B_+))'$.

Step 3 (reflection) Let us now extend the solution by reflection, to get the following general result (the notation in this lemma is independent of that used in the rest of the paper) :

Lemma 1.3.1 *For a given $u \in W^{1,p}(B_+)$, define on B the function u^* extended by reflection, that is to say*

$$u^*(x', x_N) = \left\{\begin{array}{lll} u(x', x_N) & \text{if} & x_N > 0 \\ u(x', -x_N) & \text{if} & x_N < 0. \end{array}\right.$$

Then, $u^* \in W^{1,p}(B)$ and

$$\|u^*\|_{W^{1,p}(B)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

This is a classical lemma (cf H. Brézis' book, [20], p. 158, for instance). Note that, for $x_N < 0$, one has the formulae

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x', x_N) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_N) \text{ for } 1 \leq i \leq N-1,$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial x_N}(x', x_N) = -\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', -x_N).$$

Let us apply this result to our problem. w can be extended to a function w^* which is defined on the whole of B and is an element of $H^1(B)$. But θ is a function with compact support of U, hence the same holds for $\theta \circ H$ on B ; in particular, there is an r, $r < 1$, such that B_r contents the support of θ. It is then obvious that the support of our function w^*, extended by reflection, is also contained in that ball. Thus w^* is in $H^1_0(B)$.

We extend the operator h the following way :

$$\langle h^*, \phi\rangle_{(W^{1,q}(B))', W^{1,q}(B)} = \langle h, \phi\rangle_{(W^{1,q}(B_+))', W^{1,q}(B_+)} + \langle h, \phi(x', -x_N)\rangle_{(W^{1,q}(B_+))', W^{1,q}(B_+)}.$$

for all ϕ in $W^{1,q}(B)$. In particular, $h^* \in W^{-1,p}(B)$ and $\|h^*\|_{W^{-1,p}} \leq 2\|h\|_{(W^{1,q})'}$.

To extend Λ is not that easy. We proceed as follows (we note $\Lambda = (\alpha_{kl})_{k,\ l}$)
– for all k and l less or equal than $N-1$, let $\alpha^*_{kl}(x', x_N) = \alpha_{kl}(x', -x_N)$ if $x_N < 0$,
– if $k = N$ or $l = N$ (but $(k,l) \neq (N,N)$), let $\alpha^*_{kl}(x', x_N) = -\alpha_{kl}(x', -x_N)$ if $x_N < 0$,
– $\alpha^*_{NN}(x', x_N) = \alpha_{NN}(x', -x_N)$ if $x_N < 0$.
Of course, we leave the α_{kl} as they are if $x_N > 0$. We get

$$\int_{B_-} \Lambda^* \nabla w^* . \nabla \phi(x)\ dx = \int_{B_+} \Lambda \nabla w(y) . \nabla \phi(y', -y_N)\ dy,$$

where $B_- = \{x \in B \mid x_N \leq 0\}$. There also remains to check that this matrix is elliptic. The case of $x_N > 0$ was seen before ; if $x_N < 0$, then

$$\Lambda^* \xi . \xi = \sum_{i,j \leq N-1} \alpha(x', -x_N)\xi_i \xi_j + \sum_{j=1}^{N-1} -\alpha_{N,j}(x', -x_N)\xi_N \xi_j + \sum_{i=1}^{N-1} -\alpha_{i,N}(x', -x_N)\xi_i \xi_N + \alpha_{NN}\xi_N^2.$$

If $\xi^* = (\xi', -\xi_N)$, the preceding expression can then be written as

$$\Lambda^* \xi . \xi = \Lambda \xi^* . \xi^*.$$

Now, $|\xi| = |\xi^*|$; Λ^* satisfies the ellipticity condition indeed.

We can check that w^* is the solution of the following problem :

$$\begin{cases} w^* \in H^1_0(B) \\ \displaystyle\int_B \Lambda^* \nabla w^* . \nabla \phi = \langle h^*, \phi\rangle_{H^{-1}, H^1_0}, \text{ for all } \phi \in H^1_0. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Note that h^* is an element of $W^{-1,p}(B)$ and w^* is the solution of problem (1.3.5). Then Theorem 1 is applied. There is a real p_i, $2^* > p_i > 2$, such that, if $p \in [2, p_i[$, w^* is in $W_0^{1,p}(B)$ and a real number $C_i(p)$ positive such that

$$\|w^*\|_{W_0^{1,p}} \leq C_i(p)\|h^*\|_{W^{-1,p}}.$$

Moreover p_i depends on α', β' and N, and $C_i(p)$ on α', β', p and N, not on h^*. In fact, they hence depend on A and functions H and J, that is, on the change of map. We then get the desired estimate for $v = u_i$ by restriction and with the help of the Remark 2 of Section 2.

Let $p_M = \min_{i=0,\dots,k}(p_i)$. As soon as $2 \leq p \leq p_M$, u_i belongs to $W^{1,p}(\Omega)$ and so, $u = \sum_{i=0,\dots,k} u_i$ too. Moreover, there exists a real positive $C(p)$ such that

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq C(p)\|f\|_{W^{-1,p}},$$

where $C(p)$ depends on all the $C_i(p)$, M_i and the norm of the transport operator T_J and T_H (see remark 2, section 2).

So we are done with the proof of Theorem 2.

Remarks :

1. The condition $\langle f, 1\rangle_{(H^1)',H^1} = 0$ is necessary to have all the functions of $H^1(\Omega)$ as test functions. That is an important fact for the rest of the proof.
2. The inequality (1.3.3) is true only because H is an homeomorphism. Indeed, if J is differentiable almost everywhere (due to Rademacher Theorem), it is not sure for $J \circ H$...

1.4 Some Other Boundary Conditions

1.4.1 Fourier's Condition

The purpuse of this section is to give some other generalization of Meyers' Theorem for different boundary conditions. First, we consider Fourier's Condition, *i.e.*

$$A\nabla u.n + \lambda u = 0, \quad \text{on } \partial\Omega$$

where n denotes the outward normal on the boundary of Ω and λ a function $L^\infty(\partial\Omega)$ satisfying the following condition :

$$\exists\gamma > 0 \text{ such that, } \lambda(x) \geq \gamma \text{ for almost all } x \in \partial\Omega.$$

The rest of the notation is exactly the same as in the preceding section. We still consider a uniform elliptic operator, with coefficient in L^∞ defined on an open set Ω with a Lipschitz continuous boundary. The weak formulation of our new problem is then expressed by

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)\ dx + \int_{\partial\Omega} \lambda(x)u\varphi\ ds \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \langle f, \varphi\rangle_{(H^1)',H^1},\ \forall\varphi \in H^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.4.1}$$

Once again, we want information about the regularity of the solution. The existence of solution can be proved by using Lax-Milgram theorem again. So let us express the regularity result.

Theorem 3 (Meyers Fourier) *Let Ω be a bounded connected open set of $\mathbb{R}^N$, with a Lipschitz continuous boundary. Let A of $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$ satisfy (1.2.2). For $p \geq 2$ and $q = p/p{-}1$, let T_p be the operator defined by $T_p(f) = u$ for $f \in (W^{1,q}(\Omega))'$, where u is the unique solution to (1.4.1). Then, there is a real number p_0, $2^* > p_0 > 2$, such that, for all p, $2 < p < p_0$, the operator T_p is linear continuous from $(W^{1,q}(\Omega))'$ to $W^{1,p}(\Omega)$. Moreover, the norm of T_p only depends on p, α, β and Ω and p_0 on α, β and Ω, not on f.*

The proof of this theorem works exactly as the preceding section. So let us consider only the differences.
Fix p greater or equal to 2 and less than 2^*. Get $q = p/(p-1)$. For f in $(W^{1,q}(\Omega))'$, we have existence and unicity of solution to (1.4.1). So, u belongs to $H^1(\Omega)$. Let us just consider the following mapping

$$\varphi \to \int_{\partial\Omega} \lambda(x) u \varphi \; ds.$$

The trace of a function in $H^1(\Omega)$ is in $H^{1/2}(\partial\Omega)$. So using Sobolev injection (see [1]), we find that the trace of u belongs to $L^r(\partial\Omega)$ for all $r < 2(N-1)/(N-2)$ (let $r < \infty$ if $N = 2$). So the idea is to consider that our mapping can be defined on $W^{1,q}(\Omega)$, for $q < 2$. Computation shows that q must be greater than $2N/(N+2)$, hence that p must be less than $2N/(N-2)$. So, the term $\int_{\partial\Omega} \lambda(x) u\varphi \; ds$ can be brought in the operator f. It is possible now to reproduce the proof of preceding section.

1.4.2 The Dirichlet Problem Revisited

We claim here that the Meyers theorem is true on an open set with a Lipschitz continuous boundary. The proof doesn't work as before in the step 3. Indeed, it is not possible to extended our solution to B and find a new problem satisfy by the extension. We use a different way.
Let us consider only the following problem :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(B_+), \\ \displaystyle\int_{B_+} A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x) \; dx = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1}, \;\; \forall \varphi \in H_0^1(B_+), \end{array} \right. \tag{1.4.2}$$

where A belongs to $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$ which satisfies the condition (1.2.2) and f belongs to $W^{-1,p}(B_+)$, $p > 2$. So, there exists a function F, of $(L^p(B_+))^N$ such that, for all $\varphi \in W_0^{1,q}(B_+)$,

$$\langle f, \varphi \rangle_{W^{-1,p},W_0^{1,q}} = \int_{B_+} F(x).\nabla\varphi(x) \; dx.$$

We define the function G on B by (we get, for all x in $\mathbb{R}^N$, $x = (x', x_N)$, x' in $\mathbb{R}^{N-1}$)
– if $x_N > 0$, $G(x', x_N) = F(x', x_N)$,

– if $x_N < 0$, for $i = 1, ..., N-1$, $G_i(x', x_N) = -F_i(x', -x_N)$ and $G_N(x', x_N) = F_N(x', -x_N)$.

Then G belongs to $(L^p(B))^N$ and we set, for all $\varphi \in W_0^{1,q}(B)$,

$$\langle g, \varphi \rangle_{W^{-1,p}, W_0^{1,q}} = \int_B G(x).\nabla\varphi(x)\ dx.$$

For $x_n < 0$ we denote by $\tilde{A}$ the extension of A onto B, defined as :
– for all k and l less or equal than $N-1$, let $a^*_{kl}(x', x_N) = a_{kl}(x', -x_N)$,
– if $k = N$ or $l = N$ (but $(k, l) \neq (N, N)$), let $a^*_{kl}(x', x_N) = -a_{kl}(x', -x_N)$,
– $a^*_{NN}(x', x_N) = a_{NN}(x', -x_N)$.

We can now consider the following problem

$$\begin{cases} v \in H_0^1(B), \\ \displaystyle\int_B \tilde{A}(x)\nabla v(x).\nabla\varphi(x)\ dx = \langle g, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1},\ \forall \varphi \in H_0^1(B). \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Because Theorem 1, there exists $p_0 > 2$ such that the solution v of (1.4.3) belongs to $W_0^{1,p}(B)$ if g belongs to $W^{-1,p}(B)$, for $2 < p < p_0$. We want to prove that the restriction of v to B_+, denoted $v_{|B+}$, is equal to u.

Let us prove first that the trace of v on B^{N-1} is null. We get

$$w(x', x_N) = -v(x', -x_N).$$

Due to the construction of g and $\tilde{A}$, w is a solution to (1.4.3). Then by unicity, $w = v$ in $H_0^1(B)$. For the trace operator γ on B^{N-1}, we have so

$$\gamma(v)(x') = \gamma(w)(x') = -\gamma(v)(x'),$$

then $\gamma(v) = 0$ on B^{N-1}.

Let φ be a function of $H_0^1(B_+)$. We can extend φ on B by zero, denoted $\tilde{\varphi}$. We can take $\tilde{\varphi}$ for test function in (1.4.3). Then

$$\int_B \tilde{A}(x)\nabla v(x).\nabla\tilde{\varphi}(x)\ dx = \langle g, \tilde{\varphi} \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

But we have

$$\int_B \tilde{A}(x)\nabla v(x).\nabla\tilde{\varphi}(x)\ dx = \int_{B_+} A(x)\nabla v_{|B+}(x).\nabla\varphi(x) dx$$

and

$$\begin{aligned} \langle g, \tilde{\varphi} \rangle_{H^{-1}, H_0^1} &= \int_B G(x).\nabla\tilde{\varphi}(x) dx \\ &= \int_{B_+} F(x).\nabla\varphi(x) dx \\ &= \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \end{aligned}$$

As we have seen that $v_{|B+}$ belongs to $H_0^1(B_+)$, we find finally that $v_{|B+}$ satisfies (1.4.2). By unicity, $v_{|B+} = u$ in $H_0^1(B_+)$, and so there exists a real $p_0 > 2$, such that u belongs to $W_0^{1,p}(B_+)$ if f belongs to $W^{-1,p}(B_+)$, for $2 < p < p_0$.

1.4.3 The mixed value boundary problem

We are interested in the mixed boundary value problem, *i.e.* u satisfies Dirichlet's Condition on a part $\tilde{\Gamma}$ of $\partial\Omega$ (with a non-zero $(N-1)$-dimensional measure) and a natural (Neumann or Fourier) boundary condition on $\Gamma = \partial\Omega\backslash\tilde{\Gamma}$. We need first a regularity condition on Γ. Here, we use some notations of [36], but the regularity condition on Γ are different. We set $\tilde{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Definition 1.4.1 *Let Ω be an open set with a Lipschitz continuous boundary. A measurable part Γ of $\partial\Omega$ is called* **regular**, *if there exists a family $(U_0,\ U_1,\ ...,\ U_k)$ of open sets of $\mathbb{R}^N$ satisfying (1.2.3) and $(J_1,\ ...,\ J_k)$ functions such that, for $i = 1,\ ...,\ k$, $J_i : U_i \to B$ is one-to-one, J_i and J_i^{-1} are Lipschitz continuous and we have one of the following condition*
a. $U_i \cap \Gamma = U_i \cap \partial\Omega$, *and J_i satisfies (1.2.4).*
b. $U_i \cap \Gamma = \emptyset$, *and J_i satisfies (1.2.4).*
c. $J_i(U_i \cap \Omega) = \{x \in B \mid x_N > 0$ *and* $x_{N-1} > 0\} = B_{++}$,
$J_i(U_i \cap \tilde{\Gamma}) = \{x \in B \mid x_N = 0$ *and* $x_{N-1} \geq 0\}$,
and $J_i(U_i \cap \Gamma) = \{x \in B \mid x_N > 0$ *and* $x_{N-1} = 0\}$.

Remarks
1. For $1 \leq p \leq \infty$, we denote $W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$ the closure of $\{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \operatorname{supp} u \cap \tilde{\Gamma} = \emptyset\}$ in $W^{1,p}(\Omega)$.
2. When Γ is regular, the functions of $W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$ are the functions of $W^{1,p}(\Omega)$, null on $\tilde{\Gamma}$. In particular, if $\tilde{\Omega} = \Omega$, then $W_0^{1,p}(\tilde{\Omega}) = W_0^{1,p}(\Omega)$, of course. If $\tilde{\Omega} = \overline{\Omega}$, then $W_0^{1,p}(\tilde{\Omega}) = W^{1,p}(\Omega)$.
3. We denote $W^{-1,p}(\tilde{\Omega})$, the dual space of $W_0^{1,q}(\tilde{\Omega})$

Theorem 4 *Let Ω be a bounded connected open set with a Lipschitz continuous boundary of $\mathbb{R}^N$. Let Γ be a regular part of $\partial\Omega$ and $\tilde{\Gamma} = \partial\Omega\backslash\Gamma$. Suppose $\tilde{\Gamma}$ has a non-null $(N-1)$-dimensional measure. There is a real number p_0, $2^* \geq p_0 > 2$, such that, if u is the weak solution of*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,2}(\tilde{\Omega}) \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \langle f, \varphi\rangle_{W^{-1,2}(\tilde{\Omega}),W_0^{1,2}(\tilde{\Omega})},\ \varphi \in W_0^{1,2}(\tilde{\Omega}), \end{array} \right. \tag{1.4.4}$$

where f belongs to $W^{-1,p}(\tilde{\Omega})$, for $p \in [2, p_0)$, then u belongs to $W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$ and there exists a real number $C(p)$ such that

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})} \leq C(p)\|f\|_{W^{-1,p}(\tilde{\Omega})}.$$

Moreover, p_0 only depends on A and $\tilde{\Omega}$ and $C(p)$ on A, Ω and p, not on f.

Sketch of proof. We give here only the idea of the proof (due to J. Droniou, [26]). We need to study three cases
a) First, U_i satisfies a of Definition 2. The proof works exactly as the proof of Theorem 3 in Section 3.
b) U_i satisfies b of Definition 2. The proof works exactly as the proof in Section 4.2.

c) We are in the third case, c of the definition 2. We extend the solution first to B_+ by using reflection argument with respect to x_{N-1}, as the proof of Theorem 3 in Section 3. Then, we works exactly as the proof in Section 4.2 : we consider a new Dirichlet problem on B, and the restriction of the solution to B_{++} is well the researched function. Then we obtain $W^{1,p}$-estimate on u.

1.5 Application : A uniqueness theorem

Meyers' Theorem can notably be used to prove uniqueness of the solution of Dirichlet's problem for a linear elliptic differential equation with a 2-dimensional measure as right-hand side (see [33]).
One can now generalize this result to other boundary conditions. Regarding Neumann's Problem, for instance,

Theorem 5 *Let Ω be a bounded regular open set of $\mathbb{R}^N$. Let $N = 2$ and $\mu \in M(\Omega)$, $\int_\Omega 1 d\mu = 0$, where $M(\Omega)$ is the set of bounded Radon measures. Let A be in $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$, satisfying (1.2.2). Then, there exists a unique function u such that :*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in \bigcap_{p<2} W^{1,p}(\Omega), \quad \int_\Omega u = 0, \\ \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)\ dx = \int_\Omega \varphi(x)\ d\mu, \forall\varphi \in \bigcup_{q>2} W^{1,q}(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.5.1}$$

Proof. [49], for instance, provides a proof of the existence of u. To prove its uniqueness, we show that if v satisfies

$$\left\{\begin{array}{l} v \in \bigcap_{p<2} W^{1,p}(\Omega), \quad \int_\Omega v = 0, \\ \int_\Omega A(x)\nabla v(x).\nabla\varphi(x)\ dx = 0, \forall\varphi \in \bigcup_{q>2} W^{1,q}(\Omega), \end{array}\right. \tag{1.5.2}$$

then v is null.
Indeed, suppose that v satisfies (1.5.2), and is not the null function. Let $B = \{x|v(x) > 0\}$. B is a measurable part. λ denotes the Lebesgue measure. By hypothesis, $\lambda(B) \neq 0$ and $\lambda(B) \neq \lambda(\Omega)$. Let $A^* = (a_{ji})_{i,j=1,2}$. Let ψ_B be the solution of the following problem

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_B \in H^1(\Omega), \ \int_\Omega \psi_B(x)dx = 0, \\ \int_\Omega A^*(x)\nabla\psi_B(x).\nabla\varphi(x)dx = \lambda(B)^{-1}\int_B \varphi(x)dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -\lambda(\Omega - B)^{-1}\int_{\Omega-B}\varphi(x)\ dx,\ \forall\varphi \in H^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.5.3}$$

One can then apply Theorem 2 ; as $\lambda(B)^{-1}\chi_B - \lambda(\Omega - B)^{-1}\chi_{\Omega-B}$ is an element of $L^\infty(\Omega)$ and its mean is null, there is a $\bar{q} > 2$ (which depends on A and Ω only, not on B) such that $\psi_B \in W^{1,\bar{q}}(\Omega)$. $\varphi = \psi_B$ can hence be chosen in (1.5.2) :

$$\int A(x)\nabla v(x).\nabla \psi_B(x)\ dx = 0. \tag{1.5.4}$$

As $\bar{q}' = \bar{q}/(\bar{q}-1) < 2$, we have $v \in W^{1,\bar{q}'}(\Omega)$. There exists a sequence of functions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H^1(\Omega)$ such that $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to v in $W^{1,\bar{q}'}(\Omega)$. Next, choose $\varphi = \varphi_n$ in (1.5.3) :

$$\begin{aligned}\int_\Omega A^*(x)\nabla\psi_B(x).\nabla\varphi_n(x)\ dx = \lambda(B)^{-1}\int_B \varphi_n(x)\ dx \\ -\lambda(\Omega - B)^{-1}\int_{\Omega-B}\varphi_n(x)\ dx.\end{aligned}$$

If n becomes infinite, we get :

$$\int_\Omega A^*(x)\nabla\psi_B(x).\nabla v(x)\ dx = \lambda(B)^{-1}\int_B v(x)\ dx - \lambda(\Omega-B)^{-1}\int_{\Omega-B} v(x)\ dx.$$

Now $A^*\nabla\psi_B.\nabla v = A\nabla v.\nabla\psi_B$. Hence, using (1.5.4) and $\displaystyle\int_\Omega v = 0$, we obtain

$$\int_B v(x)\ dx = 0,$$

which is impossible.

Chapitre 2

Ecoulement diphasique en milieux poreux

Ce chapitre est consacré à l'étude de systèmes modélisants des écoulements diphasiques en milieu poreux. Après une présentation de la modélisation mathématique, on démontre l'existence de solution faible pour les modèles d'écoulements miscible et immiscible en milieu poreux. Une importante difficulté (le principal intérêt aussi) provient de la modélisation des puits à l'aide de mesures vectorielles, ce qui ne permet pas d'utiliser les formulations variationnelles classiques des équations.

2.1 Modélisation mathématique

La modélisation mathématique d'écoulements polyphasiques en milieu poreux fait intervenir des phénomènes d'une grande complexité, qu'il parait bien impossible de décrire en partant d'une modélisation microscopique, à l'échelle du pore, pour aboutir à un modèle macroscopique des écoulements.

C'est le cas par exemple d'un gisement d'hydrocarbures : la roche "réservoir" est poreuse et perméable, les différents fluides étant contenus dans les pores. L'exploitation du gisement se fait dans un premier temps par décompression puis par injection d'un fluide "mouillant", le plus souvent de l'eau, qui doit à la fois déplacer les hydrocarbures vers les puits de production et maintenir une pression suffisante pour assurer un bon débit et éviter de trop gros changement de phase dans les hydrocarbures.

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, qui sont supposés décrire les phénomènes évoqués précédemment à l'échelle macroscopique, sont un assemblage de lois fondamentales, comme la conservation de la masse de chaque constituant, et d'autres plus empiriques, comme la loi de Darcy généralisée. L'élaboration de divers modèles de gisement est développé de manière détaillée entre autre dans les ouvrages de J. Bear et Y. Bachmat [11], G. Chavent et J. Jaffre [23], G. Gagneux et M. Madaune-Tort [32] et C.-M. Marle [41], ainsi que dans les travaux de A. Bourgeat, M. Quintard, S. Whitaker [19], S. Whitaker [60] et évidemment dans de nombreux articles de la Revue de l'Institut Français du Pétrole ou acte de conférence de la Society of Petroleum Engineers.

Je me contenterai dans cette partie de présenter assez brièvement quelques modèles d'écoulements diphasiques (du type eau-huile) incompressible en milieu poreux. L'originalité de ce travail réside dans la modélisation des puits de forage à l'aide de mesures et non de fonctions régulières. Ces modèles ont été introduits par P. Fabrie et T. Gallouët dans l'article *Modeling wells in porous media flow*, [31].

On considère deux fluides se partageant un milieu poreux que l'on note $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou $N = 3$. Chaque phase i ($i = 1$ ou $i = 2$) possède ses variables d'état ρ_i (densité), p_i (pression), μ_i (viscosité), et u_i désigne son taux de saturation. La fonction $\phi(x)$ désigne la porosité du milieu (le "taux" de vide). La conservation de la masse de chaque constituant s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(x)\rho_i u_i(x,t)) + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v}_i) = \text{sources}$$

où $\mathbf{v}_i$ désigne la vitesse de filtration de la phase i. $\frac{\partial}{\partial t}$ est la dérivée partielle en temps (qui sera notée également en indice quand il n'y a qu'un terme u_t), et div et ∇ sont les opérateurs différentiels habituels en espace. La loi de Darcy généralisée, établie vers 1856 par l'ingénieur H. Darcy pour un écoulement monophasique et généralisée depuis au cas polyphasique, exprime cette vitesse en fonction des autres variables du fluide :

$$\mathbf{v}_i(x,t) = -K(x)\frac{k_{r_i}(u_i(x,t))}{\mu_i(p_i(x,t))}(\nabla p_i(x,t) - \rho_i G(x))$$

où
- K est la matrice de perméabilité, qui dépend uniquement du milieu.
- k_{r_i}, qui est une fonction de u_i, s'appelle la perméabilité relative de la phase i. C'est une grandeur qui exprime la résistance du milieu en présence d'autres fluides à laisser passer le liquide i.
- G désigne la pesanteur.
- Les termes sources sont généralement écrits comme différence de deux fonctions :

$$c_i(x,t)P_{inj}(x,t) - u_i(x,t)P_{prod}(x,t),$$

  où les fonctions P_{inj} et P_{prod} représentent respectivement les puits injecteurs et producteurs. A noter que la composition du fluide injecté est connue, alors que la composition de la production dépend des inconnues u_1 et u_2. Nous reviendrons sur la description des termes sources plus loin.

Pour compléter ces équations, on a bien évidemment la relation

$$u_1 + u_2 = 1$$

et la loi de pression capillaire. Cette loi expérimentale décrit la discontinuité de la pression à l'interface des deux fluides, le fluide mouillant et l'huile, en fonction de la saturation de la phase mouillante (qui sera ici la phase 1). Cette pression est notée p_c :

$$p_c(u_1(x,t)) = p_1(x,t) - p_2(x,t).$$

Pour une description plus complète des différentes données que nous venons d'introduire, voir les livres cités précédemment. Il faut quand même donner quelques propriétés qui ont une influence sur la nature mathématique des équations. Ainsi les perméabilités relatives vérifient

$$\begin{gathered} 0 < k_{r_i}(s) < 1 \text{ si } 0 < s < 1 \\ k_{r_i}(s) = 0 \text{ si } s \leq 0 \text{ et } k_{r_i}(s) = 1 \text{ si } s \geq 1 \end{gathered} \tag{2.1.1}$$

Ainsi si l'on choisit comme inconnue la saturation de la phase mouillante, que l'on note plus simplement u, et sa pression p_1, le modèle se réduit au système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_1 u) - \operatorname{div}\left(\rho_1 K \dfrac{k_{r_1}(u)}{\mu_1(p)}(\nabla p_1 - \rho_1 G)\right) = cP_{inj} - uP_{prod} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_2(1-u)) + \operatorname{div}\left(\rho_2 K \dfrac{k_{r_2}(1-u)}{\mu_2(p_2)}(\nabla p_2 - \rho_2 G)\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = (1-c)P_{inj} - (1-u)P_{prod} \\[2ex] p_2 = p_1 + p_c(u) \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Ces équations générales peuvent être rendues plus simples si l'on considère des cas particuliers.

Dans un premier temps nous allons faire des hypothèses simplificatrices, puis nous introduirons les trois modèles qui font l'objet de cette étude, où cette fois les hypothèses changent la nature mathématique du système : la conservation de la phase mouillante sera selon les cas une équation parabolique, parabolique dégénérée ou hyperbolique.

Nous considérons un écoulement de fluides homogènes et incompressibles dans un milieu poreux indéformable. Cela revient à supposer que la porosité ϕ et les densités sont constantes. On néglige également la dépendance par rapport aux pressions des viscosités μ_i. Après simplification et en faisant la somme des deux équation ainsi obtenues, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\left(K\dfrac{k_{r_1}(u)}{\phi\mu_1}(\nabla p_1 - \rho_1 G)\right) = cP'_{inj} - uP'_{prod} \\ \\ -\operatorname{div}\left(K\left(\dfrac{k_{r_1}(u)}{\phi\mu_1}(\nabla p_1 - \rho_1 G) + \dfrac{k_{r_2}(1-u)}{\phi\mu_2}(\nabla p_2 - \rho_2 G)\right)\right) = P'_{inj} - P'_{prod} \\ \\ p_2 = p_1 + p_c(u) \end{cases}$$

Pour simplifier cette écriture, on introduit les fonctions m, f, g et F suivantes, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \Omega$,

$$m(s) = \frac{k_{r_1}(s)}{\phi\mu_1} + \frac{k_{r_2}(1-s)}{\phi\mu_2},$$

$$f(s) = \frac{k_{r_1}(s)}{\phi\mu_1 m(s)},$$

$$g(s) = \frac{k_{r_2}(1-s)}{\phi\mu_2 m(s)}$$

et

$$F(x,s) = \frac{\frac{k_{r_1}(s)}{\phi\mu_1}\rho_1 + \frac{k_{r_2}(s)}{\phi\mu_2}\rho_2}{m(s)} G(x).$$

Modélisation des puits. L'originilalité des modèles considérés réside dans la modélisation des puits de pétrole à l'aide de mesures de Radon et non de fonctions régulières. En effet, le diamètre d'un puit est de l'ordre de 10cm, ce qui est très faible comparé à la taille d'un réservoir (jusqu'à plusieurs dizaines de kilomètres) et même comparé à la taille d'une maille pour une discrétisation raisonnable (de l'ordre de 10 à 100m). On est donc amené à considérer l'action des puits comme une mesure vectorielle dont le support est réduit à un point en dimension 2 et à une ligne en dimension 3. Soit μ une mesure bornée positive, et soient a et b deux fonctions de l'ensemble $L^\infty((0,T); C(\overline{\Omega}))$. On pose

$$P'_{inj} = a(x,t)\mu(x)$$

et

$$P'_{prod} = b(x,t)\mu(x).$$

On introduit enfin la vitesse de filtration totale, v_T, définie par

$$\mathrm{v}_T = -Km(u)\left(\nabla p_1 + g(u)\nabla p_c(u) - F(x,u)\right).$$

et la fonction h définie par, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$h(s) = (\rho_1 - \rho_2)f(s)g(s)m(s).$$

Pour démontrer l'existence d'une solution (u, p_1) au système (2.1.2), on utilise plutôt le système équivalent suivant

$$\begin{cases} u_t - \mathrm{div}\ (Kf(u)m(u)(\nabla p_1 - \rho_1 G)) = ca\mu - ub\mu, \\ \\ \mathrm{v}_T + Km(u)\left(\nabla p_1 + g(u)\nabla p_c(u) - F(x,u)\right) = 0, \\ \\ \mathrm{div}\ (\mathrm{v}_T) = a\mu - b\mu, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

qui fait apparaître la pression comme solution d'une équation elliptique. Il est cependant indispensable d'avoir toujours les deux systèmes présents à l'esprit car les deux formulations sont utiles, le système (2.1.3) ne rendant pas compte en particulier de la "symétrie" du système (2.1.2).

Plusieurs hypothèses sont alors possibles. Il convient de distinguer trois modèles, selon la nature de l'écoulement et de la prise en compte des différents phénomènes physiques.

1. **Ecoulements immiscibles**.

   On ne fait aucune hypothèse simplificatrice supplémentaire. On choisit comme inconnus pour ce système la saturation u et la "pression globale" P, une fonction de u et p_1 introduite par G. Chavent dans [23]. Cette inconnue intermediaire entre les p_1 et p_2 n'a certes pas de réel sens physique mais elle est très commode pour obtenir des estimations a priori. P est définie par

$$P = p_1 - \int_0^u \frac{k_{r_2}(s)}{\phi\mu_2 m(s)} p'_c(s)ds.$$

   Le système est alors le suivant

$$\begin{cases} u_t + \mathrm{div}\ (f(u)\mathrm{v}_T) - \mathrm{div}\,(h(u)KG) \\ \qquad\qquad\qquad -\mathrm{div}\,(K\nabla\varphi(u)) = ca\mu - ub\mu \\ \\ \mathrm{v}_T + m(u)K\left(\nabla P - F(x,u)\right) = 0 \\ \\ \mathrm{div}\ (\mathrm{v}_T) = a\mu - b\mu \end{cases} \tag{2.1.4}$$

   L'équation en pression est une équation elliptique et la loi de conservation est alors une équation parabolique dégénérée. En effet, par définition, la fonction φ

peut avoir sa dérivée qui s'annule en 0 et en 1 (cela est dû à la propriété (2.1.1) des perméabilités relatives). Pour une description plus détaillée de la pression capillaire, voir les livres cités plus haut.

2. **Ecoulements immiscibles simple**.

   Cette fois, la pression capillaire est négligée. Ce modèle est le modèle étudié pour faire de la simulation de réservoir. Les fluides se déplacent principalement grâce à la vitesse de filtration totale, la capillarité ne joue pas vraiment de rôle moteur dans ces types de régime.
   On prend comme inconnues u et $P = p_1 = p_2$. Le système se réduit donc à

$$\begin{cases} u_t + \text{div}\ (f(u)\mathrm{v}_T) - \text{div}\,(h(u)KG) = ca\mu - ub\mu \\ \\ \mathrm{v}_T + m(u)K\,(\nabla P - F(x,u)) = 0 \\ \\ \text{div}\ (\mathrm{v}_T) = a\mu - b\mu \end{cases} \tag{2.1.5}$$

   L'équation en pression est exactement la même que le système précédent, mais la loi de conservation est cette fois plutôt une équation de transport. Le manque de régularité sur le champs v_T pose de graves problèmes pour la résolution de ce système. Sous la forme générale présentée ici, il n'existe à ma connaissance aucun résultat d'existence de solution faible. Je tenterai dans la partie 2.6 de montrer certaines difficultés que j'ai rencontrées.

3. **Ecoulements miscibles**.

   On suppose maintenant que les fluides sont miscibles. Cela entraîne donc que $p_1 = p_2 = P$. On néglige également le terme correctif de gravité $-\text{div}\,(h(u)KG)$ qui apparaissait dans les deux autres modèles car on considère une densité moyenne pour les deux fluides $\bar{\rho}$. Il faut cette fois tenir compte d'un phénomène de diffusion-dispersion qui n'existait pas dans les autres modèles, du type loi de Fick. On rajoute donc un terme qui fait intervenir une matrice de diffusion-dispersion moléculaires, notée $\mathrm{D}(\mathrm{v}_T)$ car elle dépend *a priori* de v_T.

$$\begin{cases} u_t + \text{div}\ (f(u)\mathrm{v}_T) - \text{div}\,(\mathrm{D}(\mathrm{v}_T)\nabla u) = ca\mu - ub\mu \\ \\ \mathrm{v}_T + m(u)K\,(\nabla P - \bar{\rho}G) = 0 \\ \\ \text{div}\ (\mathrm{v}_T) = a\mu - b\mu \end{cases} \tag{2.1.6}$$

   Ce système est le plus simple à étudier, il s'agit d'une équation parabolique couplée par un terme de transport à une équation elliptique.

Il convient de compléter ces différents avec des conditions limites et initiales convenables. La condition limite pour l'équation en pression et la condition initiale sont communes aux trois systèmes :

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.1.7}$$
$$\mathrm{v}_T(x,t).\mathrm{n}(x) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.1.8}$$

où n désigne la normale au bord de Ω. Selon le système la condition limite naturelle sur la loi de conservation s'écrit respectivement

$$K(x)\nabla\varphi(u(x,t)) + h(u(x,t))K(x)G(x)).\mathrm{n}(x) = 0, \tag{2.1.9}$$

$$h(u(x,t))K(x)G(x)).\mathrm{n}(x) = 0, \tag{2.1.10}$$

$$\text{ou } \mathrm{D}(x)\nabla u(x,t).\mathrm{n}(x) = 0, \quad \text{pour } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{2.1.11}$$

2.2 Théorèmes d'existence

L'existence d'une solution faible pour les systèmes modélisant des écoulements diphasiques miscible et immiscible en milieu poreux, avec termes sources mesures a déjà été démontrée par P. Fabrie et T. Gallouët dans l'article [31]. Il s'agit donc de reprendre les différentes étapes de la démonstration en insistant tout particulièrement sur l'étude du problème elliptique annexe. En effet le choix de la formulation pour cette équation est important pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité ainsi qu'un théorème de stabilité.

La résolution d'une équation avec second membre mesure peut se faire de deux méthodes différentes : une première utilise un théorème de régularité puis un argument de dualité ; cette méthode est due à S. Stampacchia [56]. L'autre méthode consiste à approcher le problème par un problème régulier puis à passer à la limite grâce à des estimations assez fines sur la solution approchée ; cette méthode est due à L. Boccardo et T. Gallouët dans l'article [14], et développée dans de nombreux articles. Cette deuxième méthode conduit à une formulation assez proche de la formulation variationnelle habituelle, mais pour laquelle il n'y a *a priori* pas unicité (voir [52] et [48]). Il est nécessaire de rajouter des conditions pour obtenir unicité, soit dans la formulation, soit sur la mesure.

Nous présentons en annexe un petit cours sur les problèmes à données mesures.

L'article [31] utilise la solution obtenue par approximation et démontre l'existence principalement pour le système (2.1.6). Nous présentons donc ici la résolution du problème elliptique annexe pour les deux formulations possibles et nous détaillons surtout la démonstration de l'existence pour le système (2.1.4).

2.2.1 Hypothèses

$\mathbb{R}^N$ sera toujours muni de sa structure euclidienne ; on note $|.|$ la norme sur $\mathbb{R}^N$ et $.$ le produit scalaire.

Pour une mesure borélienne ν sur Ω, on note $L^p(\Omega,\nu)$ l'espace usuel L^p relatif à la mesure ν. Si ν est la mesure de Lebesgue, on note évidemment cet espace plus simplement $L^p(\Omega)$.

Les hypothèses (H) sur les diverses données du problème sont :

$$\begin{gathered} T \in \mathbb{R}_*^+ \text{ et } \Omega \text{ un ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ N = 2 \text{ ou } 3, \\ \text{à frontière lipschitzienne.} \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

$$u_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ et } 0 \le u_0(x) \le 1 \quad \text{p.p.} x \in \Omega. \tag{2.2.2}$$

La fonction G qui représente la gravité vérifie

$$G \in C_b^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N). \tag{2.2.3}$$

Les fonctions f, g et m vérifient les trois propriétés suivantes :

$$\begin{array}{c} f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ est une fonction lipschitzienne vérifiant} \\ f(s) = 0 \quad \text{si} \quad s \le 0, \\ f(s) = 1 \quad \text{si} \quad s \ge 1. \end{array} \tag{2.2.4}$$

$$\begin{array}{c} g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ est une fonction lipschitzienne vérifiant} \\ g(s) = 1 \quad \text{si} \quad s \le 0, \\ g(s) = 0 \quad \text{si} \quad s \ge 1. \end{array} \tag{2.2.5}$$

$$\text{Il existe } \overline{m} > 0 \text{ tel que } , \forall s \in \mathbb{R},\ m(s) > \overline{m} \tag{2.2.6}$$

K, la matrice de perméabilité, et D, la matrice de diffusion-dispersion, vérifient la condition d'ellipticité suivante

$$\text{Il existe } \alpha, \beta > 0 \ \text{ tels que } K \text{ et } \mathrm{D} \in M(\alpha, \beta, \Omega) \tag{2.2.7}$$

où $M(\alpha, \beta, \Omega)$ est défini par

$$\begin{array}{l} M(\alpha, \beta, \Omega) = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N} \mid \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \qquad \alpha |\xi|^2 \le A(x)\xi.\xi \text{ et } |A(x)\xi| \le \beta |\xi| \text{ p.p. } x \in \Omega\}. \end{array}$$

Il convient enfin de préciser les hypothèses vérifiées par les termes sources, c'est-à-dire les fonctions a, b et c et la mesure μ. On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des mesures finies sur Ω et $\mathcal{M}_+(\Omega)$ l'ensemble des mesures finies positives sur Ω. Les fonctions a, b et c et la mesure μ vérifient

$$\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega) \tag{2.2.8}$$

et

$$\begin{array}{c} a,\ b \text{ et } c \in L^\infty((0,T); C(\overline{\Omega})) \\ 0 \le a(x,t), \quad 0 \le b(x,t) \quad \text{et} \quad 0 \le c(x,t) \le 1, \\ \qquad\qquad\qquad \text{p.p. } t \in (0,T),\ \forall x \in \Omega. \end{array} \tag{2.2.9}$$

La condition limite (2.1.8) impose également la condition de compatibilité suivante

$$\int_\Omega a(x,t) d\mu = \int_\Omega b(x,t) d\mu. \tag{2.2.10}$$

Pour les théorèmes 1 et 3, on a également besoin de l'hypothèse supplémentaire sur la mesure μ :

$$\mu \in (W^{1,q}(\Omega))',\ \forall q > 2. \tag{2.2.11}$$

Enfin, pour réussir à étudier le système 2.1.4, on suppose que la fonction φ vérifie l'hypothèse suivante

$$\varphi \text{ bijective et } \exists \rho \in]0,1[\text{ tel que } \varphi^{-1} \text{ est } \rho - \text{höldérienne}. \tag{2.2.12}$$

2.2.2 Ecoulement miscible

Définition 2.2.1 *On dit que le couple (u, P) est solution faible du problème (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.11) si*

$$\begin{gathered} u \in L^2((0,T);H^1(\Omega)), \quad 0 \leq u \leq 1, \\ u \in L^\infty((0,T);L^1(\Omega,\mu)), \quad 0 \leq u \leq 1,\ \mu - p.p.\ sur\ \Omega,\ p.p.\ sur\ (0,T), \end{gathered} \tag{2.2.13}$$

$$u_t \in L^2((0,T);(W^{1,s}(\Omega))'),\ \forall s > 2, \tag{2.2.14}$$

$$u \in C([0,T];(W^{1,s}(\Omega))'),\ \forall s > 2,\ u(.,0) = u_0\ dans\ (W^{1,s}(\Omega))'), \tag{2.2.15}$$

$$P \in L^\infty((0,T);W^{1,q}(\Omega)),\ \forall q \in [1,2)\,,\ \int_\Omega P(x)dx = 0, \tag{2.2.16}$$

$$\begin{aligned} &\langle u_t, v\rangle_{(W^{1,r})',W^{1,r}} + \int_\Omega D(\mathrm{v}_T)\nabla u.\nabla v\ dx \\ &\quad - \int_\Omega f(u)\mathrm{v}_T.\nabla v\ dx + \int_\Omega u\, v\, b\ d\mu - \int_\Omega v\, c\, a\ d\mu = 0, \\ &\qquad\qquad \forall v \in W^{1,r}(\Omega),\ \forall r > 2,\ p.p.\ sur\ (0,T), \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

$$\mathrm{v}_T + m(u)K\left(\nabla P - \overline{\rho}G\right) = 0,\ p.p.\ sur\ \Omega \times (0,T) \tag{2.2.18}$$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \mathrm{v}_T(x,t).\nabla w(x)dx = \int_\Omega w(x)a(x,t)d\mu - \int_\Omega w(x)b(x,t)d\mu, \\ \forall w \in W^{1,r}(\Omega),\ \forall r > 2,\ p.p.\ sur\ (0,T). \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Théorème 1 *On suppose (2.2.1)-(2.2.11). Alors il existe une solution faible au problème (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.11), au sens de la Définition 2.2.1.*

La démonstration de ce théorème est faite dans l'article [31].

On peut s'affranchir de l'hypothèse (2.2.11) sur la mesure, la formulation est alors légèrement différente (pour l'équation en pression) :

Définition 2.2.2 *On dit que le couple (u, P) est solution très faible du problème (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.11) si*

$$\begin{gathered} u \in L^2((0,T);H^1(\Omega)), \quad 0 \leq u \leq 1, \\ u \in L^\infty((0,T);L^1(\Omega,\mu)), \quad 0 \leq u \leq 1,\ \mu - p.p.\ sur\ \Omega,\ p.p.\ sur\ (0,T), \end{gathered} \tag{2.2.20}$$

$$u_t \in L^2((0,T);(W^{1,s}(\Omega))'),\ \forall s > N, \tag{2.2.21}$$

$$u \in C([0,T];(W^{1,s}(\Omega))'),\ \forall s > N,\ u(.,0) = u_0\ dans\ (W^{1,s}(\Omega))'), \tag{2.2.22}$$

$$P \in L^\infty((0,T);W^{1,q}(\Omega)),\ \forall q \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right),\ \int_\Omega P(x)dx = 0, \tag{2.2.23}$$

$$\begin{aligned} &\langle u_t, v\rangle_{(W^{1,r})',W^{1,r}} + \int_\Omega D(\mathrm{v}_T)\nabla u.\nabla v\ dx \\ &\quad - \int_\Omega f(u)\mathrm{v}_T.\nabla v\ dx + \int_\Omega u\, v\, b\ d\mu - \int_\Omega v\, c\, a\ d\mu = 0, \\ &\qquad\qquad \forall v \in W^{1,r}(\Omega),\ \forall r > N,\ p.p.\ sur\ (0,T), \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

$$\mathrm{v}_T + m(u)K\left(\nabla P - \overline{\rho}G\right) = 0,\ p.p.\ sur\ \Omega \times (0,T) \tag{2.2.25}$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega P(x,t)(-\mathrm{div}\,(m(u(x,t))^t K(x)\nabla w(x)))dx \\ &\quad = \int_\Omega \overline{\rho}\, m(u(x,t))K(x)G(x).\nabla w(x)dx \\ &\qquad + \int_\Omega w(x)a(x,t)d\mu - \int_\Omega w(x)b(x,t)d\mu, \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

$$\forall w \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)\ telle\ que\ - \mathrm{div}\,(m(u)^t K\nabla w) \in C_c^\infty(\Omega).$$

Théorème 2 *On suppose (2.2.1)-(2.2.10). Alors il existe une solution très faible au problème (2.1.6), (2.1.7),(2.1.8) et (2.1.11), au sens de la Définition 2.2.2.*

La démonstration de ce théorème n'est pas exactement faite dans ce chapitre, on démontre le résultat d'existence pour le système (2.1.4) qui pose plus de problèmes. Tous les ingrédients de la démonstration seront donc présentés dans un cadre un peu différent.

2.2.3 Ecoulement immiscible

Le système (2.1.4) pose en effet plus de problèmes à cause évidemment du fait que la foncion φ' peut s'annuler en des points isolés (en 0 et en 1, pour être précis). De très nombreux travaux existent sur la résolution d'équation parabolique non linéairess dégénérées. Dans le cadre des écoulements diphasiques en milieu poreux, citons le livre de G. Gagneux et M. Madaune-Tort [32] et les travaux de H. W. Alt et co-auteurs, [5] et [6].

Là encore, deux versions sont possibles, selon que l'on suppose (2.2.11) on non.

Définition 2.2.3 *On dit que le couple (u, P) est solution faible du problème (2.1.4), (2.1.7),(2.1.8) et (2.1.9) si*

$$\begin{array}{c}\varphi(u) \in L^2((0,T);H^1(\Omega)), \quad 0 \le u \le 1, \\ u \in L^\infty((0,T);L^1(\Omega,\mu)), \quad 0 \le u \le 1, \ \mu - p.p. \ sur \ \Omega, \ p.p. \ sur \ (0,T),\end{array} \tag{2.2.27}$$

$$u_t \in L^2((0,T);(W^{1,s}(\Omega))'), \ \forall s > 2, \tag{2.2.28}$$

$$u \in C([0,T];(W^{1,s}(\Omega))'), \ \forall s > 2, \ u(.,0) = u_0 \ dans \ (W^{1,s}(\Omega))'), \tag{2.2.29}$$

$$P \in L^\infty((0,T);W^{1,q}(\Omega)), \ \forall q \in [1,2)\,, \ \int_\Omega P(x)dx = 0, \tag{2.2.30}$$

$$\begin{array}{l}\langle u_t, v\rangle_{(W^{1,r})',W^{1,r}} + \displaystyle\int_\Omega K\nabla\varphi(u).\nabla v \ dx - \int_\Omega f(u)\mathrm{v}_T.\nabla v \ dx \\ \qquad + \displaystyle\int_\Omega h(u)KG.\nabla v \ dx + \int_\Omega u\,v\,b \ d\mu - \int_\Omega v\,c\,a \ d\mu = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \forall v \in W^{1,r}(\Omega), \ \forall r > 2, \ p.p. \ sur \ (0,T),\end{array} \tag{2.2.31}$$

$$\mathrm{v}_T + m(u)K\left(\nabla P - F(x,u)\right) = 0, \ p.p. \ sur \ \Omega \times (0,T) \tag{2.2.32}$$

$$\begin{array}{r}-\displaystyle\int_\Omega \mathrm{v}_T(x,t).\nabla w(x)dx = \int_\Omega w(x)a(x,t)d\mu - \int_\Omega w(x)b(x,t)d\mu, \\ \forall w \in W^{1,r}(\Omega), \ \forall r > 2, \ p.p. \ sur \ (0,T).\end{array} \tag{2.2.33}$$

Théorème 3 *On suppose (2.2.1)-(2.2.12). Alors il existe une solution faible au problème (2.1.4), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9), au sens de la Définition 2.2.3.*

Les grandes lignes de la démonstration de ce théorème sont données dans l'article [31]. Comme précédemment, on peut s'affranchir de l'hypothèse (2.2.11).

Définition 2.2.4 *On dit que le couple (u,P) est solution très faible du problème (2.1.4), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9) si*

$$\begin{array}{c}\varphi(u) \in L^2((0,T);H^1(\Omega)), \quad 0 \le u \le 1, \\ u \in L^\infty((0,T);L^1(\Omega,\mu)), \quad 0 \le u \le 1, \ \mu - p.p. \ sur \ \Omega, \ p.p. \ sur \ (0,T),\end{array} \tag{2.2.34}$$

$$u_t \in L^2((0,T);(W^{1,s}(\Omega))'), \ \forall s > N, \tag{2.2.35}$$

$$u \in C([0,T];(W^{1,s}(\Omega))'), \ \forall s > N, \ u(.,0) = u_0 \ dans \ (W^{1,s}(\Omega))'), \tag{2.2.36}$$

$$P \in L^\infty((0,T);W^{1,q}(\Omega)), \ \forall q \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right), \ \int_\Omega P(x)dx = 0, \tag{2.2.37}$$

$$\begin{aligned}\langle u_t, v\rangle_{(W^{1,r})',W^{1,r}} &+ \int_\Omega K\nabla\varphi(u).\nabla v\ dx - \int_\Omega f(u)\mathrm{v}_T.\nabla v\ dx \\ &+ \int_\Omega h(u)KG.\nabla v\ dx + \int_\Omega u\,v\,b\ d\mu - \int_\Omega v\,c\,a\ d\mu = 0, \\ &\qquad \forall v \in W^{1,r}(\Omega),\ \forall r > N,\ \textit{p.p. sur } (0,T),\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

$$\mathrm{v}_T + m(u)K\left(\nabla P - F(x,u)\right) = 0,\ \textit{p.p. sur } \Omega\times(0,T) \tag{2.2.39}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega & P(x,t)(-\mathrm{div}\,(m(u(x,t))^t K(x)\nabla w(x)))dx \\ &= \int_\Omega m(u(x,t))F(x,u(x,t)).\nabla w(x)dx \\ &\qquad + \int_\Omega w(x)a(x,t)d\mu - \int_\Omega w(x)b(x,t)d\mu,\end{aligned} \tag{2.2.40}$$

$$\forall w \in C(\overline{\Omega})\cap H^1(\Omega)\ \textit{telle que } -\mathrm{div}\,(m(u)^t K\nabla w) \in C_c^\infty(\Omega).$$

Théorème 4 *On suppose (2.2.1)-(2.2.10) et (2.2.12). Alors il existe une solution très faible au problème (2.1.4), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9), au sens de la Définition 2.2.4.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet des parties suivantes.

2.2.4 Présentation des démonstrations

Les démonstrations des 4 théorèmes se déroulent un peu de la même manière. On commence par démontrer l'existence pour le système considéré avec $\mu \in L^2(\Omega)$ au lieu de μ mesure. Il s'agit ensuite de passer à la limite dans ce système régularisé grâce à un résultat de stabilité pour l'équation en pression et à des estimations convenables sur u.

Qui peut le plus peut le moins ! On se propose donc de démontrer le Théorème 4, qui présente le plus de difficultés (équation parabolique dégénérée et formulation au sens de Stampacchia pour l'équation en pression). Le résultat d'existence du système (2.1.4) avec données régulières est donné par la proposition suivante

Proposition 2.2.1 *On suppose (2.2.1)-(2.2.10) et $\mu \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une solution variationnelle au problème (2.1.4), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9), au sens suivant*

$$\begin{gathered}\varphi(u) \in L^2((0,T);H^1(\Omega)), \\ u \in C[(0,T);L^2(\Omega)],\quad 0 \le u \le 1,\ \textit{p.p. sur } \Omega,\end{gathered} \tag{2.2.41}$$

$$u_t \in L^2((0,T);(H^1(\Omega))'),\ \forall s > 2, \tag{2.2.42}$$

$$u(.,0) = u_0 \ \textit{dans} \ L^2(\Omega), \tag{2.2.43}$$

$$P \in L^\infty((0,T);H^1(\Omega)), \ \int_\Omega P(x)dx = 0, \tag{2.2.44}$$

$$\begin{aligned} \langle u_t, v\rangle_{(H^1)',H^1} + \int_\Omega K\nabla\varphi(u).\nabla v\,dx - \int_\Omega f(u)\mathrm{v}_T.\nabla v\,dx \\ + \int_\Omega h(u)KG.\nabla v\ dx + \int_\Omega u\,v\,b\,\mu\,dx - \int_\Omega v\,c\,a\,\mu\,dx = 0, \end{aligned} \tag{2.2.45}$$

$$\forall v \in H^1(\Omega), \ \textit{p.p. sur} \ (0,T),$$

$$\mathrm{v}_T + m(u)K\left(\nabla P - F(x,u)\right) = 0, \ \textit{p.p. sur} \ \Omega \times (0,T) \tag{2.2.46}$$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \mathrm{v}_T(x,t).\nabla w(x)dx = \int_\Omega w(x)a(x,t)\mu(x)\,dx \\ -\int_\Omega w(x)b(x,t)\mu(x)\,dx, \ \forall w \in H^1(\Omega), \ \textit{p.p. sur} \ (0,T). \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Pour démontrer cette proposition, on commence par démontrer l'existence d'une solution $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ au problème suivant où l'on a effectué une régularisation parabolique de l'équation (2.2.45).

$$\begin{cases} (u_\varepsilon)_t + \mathrm{div}\ (f(u_\varepsilon)\mathrm{v}_T^\varepsilon) - \mathrm{div}\,(h(u_\varepsilon)KG) \\ \qquad\qquad -\mathrm{div}\,(K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)) = ca\mu - u_\varepsilon b\mu \\ \\ \mathrm{v}_T^\varepsilon + m(u_\varepsilon)K\left(\nabla P_\varepsilon - F(x,u_\varepsilon)\right) = 0 \\ \\ \mathrm{div}\ (\mathrm{v}_T^\varepsilon) = a\mu - b\mu \\ \\ K(x)\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t)) + h(u_\varepsilon(x,t))K(x)G(x)).\mathrm{n}(x) = 0, \end{cases} \tag{2.2.48}$$

où φ_ε est définie pour tout $s \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_\varepsilon(s) = \varphi(s) + \varepsilon s,$$

avec $\varepsilon > 0$. La démonstration de l'existence de $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ utilise le Théorème de point fixe de Schauder.

Au cours de ces démonstrations, on établit un certain nombre d'estimations indispensables également pour les démonstrations de la Proposition 2.2.1 et du Théorème 4. En particulier, on démontre une estimation des translations en temps de $\varphi(u)$ pour avoir une convergence forte de ce terme dans le système 2.2.48 quand ε tend vers 0. Cela permet de ne pas utiliser l'hypothèse (2.2.12). Cette estimation dépend malheureusement de la norme L^2 du second membre.

Avant de démontrer la Proposition 2.2.1, on s'intéresse plus spécialement à l'équation elliptique vérifiée par la pression.

2.3 Etude d'un problème elliptique associé

Dans cette partie, nous donnons les résultats concernant l'équation elliptique associée au système étudié. Nous présentons ces résultats pour les deux formulations possibles, celle obtenue par approximation et la formulation par dualité.

Il s'agit du problème de Neumann suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A(x)(\nabla P(x) - F(x))) = \mu, \text{ dans } \Omega, \\ \\ A(x)(\nabla P(x) - F(x)).\mathrm{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

où $\mathrm{n}(x)$ désigne la normale extérieur à Ω au point x.

$$\begin{aligned} A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N} \text{ tel qu'il existe } \alpha \text{ et } \beta, \\ \beta > \alpha > 0, \text{ pour lesquels } A \in M(\alpha, \beta, \Omega). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

On suppose également que

$$\mu \in \mathcal{M}(\Omega), \quad \mu(\Omega) = 0, \tag{2.3.3}$$

et

$$F = {}^t(F_1, ..., F_N) \in (L^2(\Omega))^N. \tag{2.3.4}$$

Pour démontrer l'unicité de la solution dans la partie 2.3.1, on a besoin de l'hypothèse supplémentaire sur la mesure

$$\mu \in (W^{1,q}(\Omega))', \ \forall q > 2. \tag{2.3.5}$$

2.3.1 Solution par approximation

Dans l'article [31], les auteurs démontrent le résultat d'existence et d'unicité de ce problème par la méthode d'approximation, l'unicité n'étant obtenue que grâce à l'hypothèse supplémentaire (2.3.5) et le théorème de régularité de Meyers qui fait l'objet du chapitre 1.

Il s'agit donc de rappeler les résultats et les grandes lignes des démonstration, en insistant sur l'unicité, ce travail ayant motivé l'article [34].

Existence et unicité

Proposition 2.3.1 (Existence) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne. On suppose (2.3.2), (2.3.3) et (2.3.4). Alors il existe une solution au problème (2.3.1) au sens suivant*

$$\begin{aligned} &P \in W^{1,q}(\Omega), \quad \forall q \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right), \quad \int_\Omega P(x)dx = 0, \\ &\int_\Omega A(x)\nabla P(x)\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx \\ &\qquad\qquad + \int_\Omega \varphi(x)d\mu, \ \forall\varphi \cup_{r>d} W^{1,r}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Cette démonstration est présentée dans l'article [31]. Elle se déroule en deux étapes et est vraiment trés proche de la démonstration de l'article [14] que l'on a rappelée en annexe.

La première étape consiste à obtenir des estimations assez fines sur la solution d'un problème approché, en utilisant la technique des "rondelles", et dans la seconde étape, on passe à la limite dans le problème approché pour obtenir le résultat d'existence.

On rappelle que la technique des "rondelles" consiste à prendre $\varphi = \varphi_k(P)$, $k \in \mathbb{R}_+$, comme fonction test dans l'équation, où φ_k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
&\varphi_k(s) = -1, \text{ si } s \leq -k-1,\\
&\varphi_k(s) = s+k, \text{ si } -k-1 < s < -k,\\
&\varphi_k(s) = 0, \text{ si } -k \leq s \leq k,\\
&\varphi_k(s) = s-k, \text{ si } k < s < k+1,\\
&\varphi_k(s) = 1, \text{ si } s \geq k+1.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme de Stampacchia (voir annexe), $\varphi_k(P) \in H^1(\Omega)$ et $\nabla\varphi_k(P) = \varphi_k'(P)\nabla P$, presque partout sur Ω. On obtient donc qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\int_{B_k} |\nabla P(x)|^2 \leq C_1 + \frac{2}{\alpha}\|f\|_{L^1(\Omega)}, \tag{2.3.7}$$

où $B_k = \{x \in \Omega,\ k \leq |P(x)| \leq k+1\}$. Cette estimation permet de démontrer qu'il existe C_2, dépendant uniquement de α, β, $\|F\|_{(L^2)^N}$, $\|f\|_{L^1}$, Ω et q, telle que

$$\|p\|_{W^{1,q}} \leq C_3. \tag{2.3.8}$$

La démonstration que nous proposons donne directement l'existence et l'unicité de la solution dès que la mesure μ vérifie l'hypothèse (2.3.5).

Proposition 2.3.2 (Existence et unicité) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, à frontière lipschitzienne. On suppose (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.5). Alors il existe une unique solution au problème (2.3.1) au sens suivant*

$$\begin{aligned}
&P \in W^{1,q}(\Omega), \quad \forall q \in [1,2)\,, \quad \int_\Omega P(x)dx = 0,\\
&\int_\Omega A(x)\nabla P(x)\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx\\
&\qquad\qquad + \int_\Omega \varphi(x)d\mu,\ \forall\varphi \in \cup_{r>2}W^{1,r}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Preuve. La démonstration fait appel à la généralisation du Théorème de régularité de Meyers démontrée dans le chapitre 1. On pose

$$W_*^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega);\ \int_\Omega u(x)\,dx = 0\right\},$$

et $H^1_*(\Omega) = W^{1,2}_*(\Omega)$. On considère le problème dual suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1_*(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega {}^tA(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \langle f, \varphi\rangle_{(H^1)',H^1}, \quad \forall\varphi \in H^1_*(\Omega), \end{array}\right. \tag{2.3.10}$$

et l'opérateur T de $(H^1(\Omega))'$ dans $H^1(\Omega)$ défini par $T(f) = u$. D'après le Lemme de Lax-Milgram, il existe bien un unique u vérifiant (2.3.10) et l'opérateur T est bien défini.

Le résultat de régularité établi au chapitre 1, le Théorème 2, dit qu'il existe un réel $p_0 > 2$, qui ne dépend que de A et Ω, tel que, si f appartient à $(W^{1,p'}(\Omega))'$, alors u appartient à $W^{1,p}(\Omega)$, pour tout p, $2 < p < p_0$, et $p' = p/(p-1)$. De plus l'opérateur T_p, la restriction de T à $(W^{1,p'}(\Omega))'$ est linéaire continue de $(W^{1,p'}(\Omega))'$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On peut donc considérer l'opérateur adjoint T^*_p, pour tout p, $2 \leq p < p_0$. Cet opérateur est linéaire continu de $((W^{1,p}(\Omega))'$ dans $W^{1,p'}(\Omega)$. Par définition d'un opérateur adjoint, pour tout $g \in ((W^{1,p}(\Omega))'$, $v = T^*_r(g)$ est l'unique élément de $W^{1,p'}(\Omega)$ tel que

$$\langle f, v\rangle_{(W^{1,p'})',W^{1,p'}} = \langle g, T_p(f)\rangle_{(W^{1,p})',W^{1,p}}, \quad \forall f \in (W^{1,p'}(\Omega))'.$$

Ce qui donne encore, $v = T^*_r(g)$ est l'unique solution de

$$\left\{\begin{array}{l} v \in W^{1,p'}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega {}^tA(x)\nabla u(x).\nabla v(x)dx = \langle g, u\rangle_{(W^{1,p})',W^{1,p}}, \quad \forall u \in \operatorname{Im} T_p, \end{array}\right. \tag{2.3.11}$$

où $\operatorname{Im} T_p$ est l'image de l'opérateur T_p. On a $\operatorname{Im} T_p = W^{1,p}_*(\Omega)$. En effet, pour tout $\psi \in W^{1,p}_*(\Omega)$, on peut toujours définir $f \in (W^{1,p'}(\Omega))'$ par

$$\langle f, \varphi\rangle_{(W^{1,p'})',W^{1,p'}} = \int_\Omega {}^tA(x)\nabla\psi(x).\nabla\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in W^{1,p'}(\Omega).$$

Alors, $u = T_p(f)$ est la solution de (2.3.10). On a immédiatement $u = v$.

De plus grâce à son unicité, la solution de 2.3.11 ne dépend pas de p, $2 < p < p_0$. Ainsi ilexiste un unique solution au problème suivant

$$\left\{\begin{array}{l} v \in W^{1,q}(\Omega), \quad \forall q < 2 \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla v(x).\nabla\varphi(x)dx = \langle g, \varphi\rangle_{(W^{1,p})',W^{1,p}}, \quad \forall\varphi \in W^{1,p}_*(\Omega), \end{array}\right.$$

Pour conclure, il suffit de choisir l'application g telle que, pour tout $p > 2$,

$$\langle g, \varphi\rangle_{(W^{1,p})',W^{1,p}} = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx + \langle \mu, \varphi\rangle_{(W^{1,p})',W^{1,p}}, \quad \forall\varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Enfin, l'hypothèse $\mu(\Omega) = 0$ permet de prendre toutes les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ comme fonction test et pas seulement celles de $W^{1,p}_*(\Omega)$. ■

Stabilité

Pour passer à la limite dans le système complet (c'est-à-dire dans les démontsrations des Théorèmes 1 et 3), le résultat suivant de stabilité est nécessaire

Proposition 2.3.3 (stabilité) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (L^\infty(\Omega))^{N\times N}$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (L^2(\Omega))^N$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ et soit $A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N}$, $F \in (L^2(\Omega))^N$ et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. On suppose que*

1. *Il existe α et β, $\beta > \alpha > 0$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in M(\alpha,\beta,\Omega)$, $A \in M(\alpha,\beta,\Omega)$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers A.*
2. *$F_n \to F$ dans $(L^2(\Omega))^N$ quand $n \to \infty$.*
3. *$f_n \to \mu$ pour la topologie faible-* de $\mathcal{M}(\Omega)$ quand $n \to \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$ et $\int_\Omega f_n(x)\,dx = 0$ pour tout n.*

On suppose également que μ appartient à $(W^{1,p}(\Omega))'$, pour tout $p > 2$. Soit u_n l'unique solution de (2.3.1) avec A_n, F_n et μ_n à la place de A, F et μ au sens de la Proposition 2.3.2. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique solution u de (2.3.1), au sens de la Proposition 2.3.2, dans $W^{1,q}(\Omega)$, pour tout $1 \le q < 2$.

Preuve. La démonstration se déroule en 3 étapes. La première étape permet d'obtenir la convergence faible d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,q}(\Omega)$. Dans la deuxième étape, on démontre la convergence forte et dans la dernière, on récupère la convergence de toute la suite vers u, l'unique solution de 2.3.9.

Etape 1. Pour tout $q < 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,q}(\Omega)$. Ce résultat se déduit de l'estimation (2.3.8) pour tout $q < N/(N-1)$. Pour montrer que la suite est bornée dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < 2$, il suffit de considérer l'opérateur T_p, $p = q/(q-1)$, introduit dans la démonstration de la Proposition 2.3.2. En effet, d'après le Théorème 2, il existe $p_0 > 2$ tel que, pour tout p, $2 < p < p_0$, T_p est linéaire continue. De plus sa norme ne dépend que de α, β, Ω et p et p_0 ne dépend que de α, β et Ω ; donc il en va de même de la norme de son adjoint T_p^*. Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_{W^{1,q}} \le \|T_p^*\|(\beta\|F_n\|_{(L^2)^N} + \|f_n\|_{(W^{1,p})'}).$$

Ainsi, on peut supposer, à une sous-suite près, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $W^{1,q}(\Omega)$ vers un certain u pour tout $q < 2$. En passant à la limite dans (2.3.9), avec u_n, A_n, f_n et F_n à la place de u, A, μ et F, on montre que u est la solution de (2.3.9).

D'après les injections de Sobolev, on peut également supposer que, à une sous-suite près, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^q(\Omega)$ vers u. Ce qui permet encore de supposer que, à une sous-suite près, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout sur Ω vers u. Enfin, l'estimation 2.3.7 permet d'obtenir que pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, la suite $(t_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, où t_k et la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $t_k(s) = \min(k, \max(-k, s))$. Comme la suite $(t_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout sur Ω vers $t_k(u)$, cette suite converge donc également vers $t_k(u)$ dans $H^1(\Omega)$ faible.

Etape 2. Convergence forte de la suite.

On démontre dans cette partie que $\nabla u_n \to \nabla u$ en mesure quand $n \to +\infty$. Ce résultat permet en effet, après une nouvelle extraction, d'avoir $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout quand $n \to +\infty$. De plus, d'après la première étape, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,q}(\Omega)$. On rappelle que toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bornée dans $L^p(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, qui converge presque partout vers un certain v, converge vers v dans $L^q(\Omega)$, pour tout $q < p$. On en déduit donc que $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^q(\Omega)$, pour tout $q < 2$, quand $n \to +\infty$. Ainsi, la convergence en mesure de la suite $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique la convergence forte de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,q}(\Omega)$, pour tout $q < 2$.

Pour une fonction B de Ω dans $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $\{B \geq b\}$, l'ensemble $\{x \in \Omega;\ B(x) \geq b\}$. Soit $\gamma > 0$. Il s'agit donc de démontrer que

$$\lambda(\{|\nabla u_n - \nabla u| \geq \gamma\}) \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\{|\nabla u_n - \nabla u| \geq \gamma\} \subset \{|u| \geq k\} \cup \{|u_n - u| \geq \delta\} \cup E_{k,\delta,n},$$

avec $E_{k,\delta,n} = \{|u| < k\} \cap \{|u_n - u| < \delta\} \cap \{|\nabla u_n - \nabla u| \geq \gamma\}$.
Il est toujours possible de choisir $k \in \mathbb{R}_+$ suffisament grand pour que $\lambda(\{|u| \geq k\}) < \varepsilon$. Comme $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$ (entre autre...), pour tout $\delta > 0$, il existe n_δ tel que $\lambda(\{|u_n - u| \geq \delta\}) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\delta$. Il reste donc a montrer qu'il est possible de choisir $\delta > 0$ tel que $\lambda(E_{k,\delta,n} \leq \varepsilon)$ pour n assez grand. On prend $\varphi = t_\delta(u_n - t_k(u))$ dans l'équation (2.3.9) avec u_n, A_n, f_n et F_n à la place de u, A, μ et F (comme les f_n sont dans $L^2(\Omega)$ et $t_k(u)$ dans $H^1(\Omega)$, cela est possible). On obtient

$$\begin{aligned}
&\alpha\gamma^2\, \lambda(E_{k,\delta,n}) \\
&\qquad \leq \int_\Omega A_n(x)\nabla(u_n(x) - t_k(u(x))).\nabla t_\delta(u_n(x) - t_k(u(x)))\, dx \\
&\qquad \leq \int_\Omega A_n(x)(F_n - \nabla t_k(u(x))).\nabla t_\delta(u_n(x) - t_k(u(x)))\, dx + \delta\|f_n\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dasn $L^1(\Omega)$. Ainsi, il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout δ, $0 < \delta < \delta_1$,

$$\delta\|f_n\|_{L^1} \leq \varepsilon\alpha\gamma^2.$$

En supposant que $\delta < 1$, il est possible d'écrire le terme qu'il nous reste à majorer

$$\int_\Omega A_n(x)(F_n - \nabla t_k(u(x))).\nabla t_\delta(t_{k+1}(u_n(x)) - t_k(u(x)))\, dx.$$

D'après l'étape précédente, cette expression converge, quand $n \to \infty$, vers

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A(x)(F - \nabla t_k(u(x))).\nabla t_\delta(t_{k+1}(u(x)) - t_k(u(x)))\, dx \\
&hspace1cm = \int_{k<|u|<k+\delta} A(x)(F - \nabla t_k(u(x))).\nabla t_{k+1}(u(x))\, dx.
\end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ car $A(F - \nabla t_k(u)).\nabla t_{k+1}(u) \in L^1(\Omega)$. Il est donc de possible de choisir $\delta_2 > 0$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\delta < \delta_2$ et $n \geq n_2$,

$$\int_\Omega A_n(x)(F_n - \nabla t_k(u(x))).\nabla t_\delta(t_{k+1}(u_n(x)) - t_k(u(x)))\,dx \leq \varepsilon\alpha\gamma^2.$$

Ainsi, si on choisit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1)$, et que l'on prend ensuite n suffisament grand ($n > \max(n_\delta, n_2)$), on a bien démontrer que

$$\lambda(\{|\nabla u_n - \nabla u| \geq \gamma\}) \leq 4\varepsilon.$$

La suite $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en mesure vers ∇u.

Etape 3. Convergence de toute la suite.

Grâce à l'unicité de la solution de (2.3.9), on récupère la convergence de toute la suite. A noter qu'en dimension $N = 2$, l'hypothèse (2.3.5) est inutile, donc l'unicité et par suite la stabilité forte que l'on vient de démontrer sont toujours vraies. En dimension $N = 3$, le résultat de régularité de Meyers permet de démontrer directement l'existence et l'unicité de la solution grâce à un argument de dualité, un peu comme pour la méthode de Stampacchia... ■

2.3.2 Solution au sens de Stampacchia

La formulation choisie ici est différente. On raisonne par dualité ; cette méthode a été introduite par G. Stampacchia dans l'article [56] pour le problème de Dirichlet. Dans [26], J. Droniou généralise les résultats de Stampacchia à un grand nombre de conditions limites. En particulier le résultat de régularité sur lequel s'appuie cette méthode est encore vrai pour le problème de Neumann. Notons également que cette formulation permet d'obtenir l'unicité pour toute mesure sur Ω.

Proposition 2.3.4 (Existence et unicité) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, à frontière lipschitzienne. On suppose (2.3.2), (2.3.3) et (2.3.4). Alors il existe une unique solution du problème (2.3.1) au sens suivant*

$$\left\{\begin{aligned} & P \in W^{1,q}(\Omega), \quad \forall q \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right), \quad \int_\Omega P(x)dx = 0, \\ & -\int_\Omega P(x)\mathrm{div}\,({}^tA(x)\nabla\varphi(x))dx = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx \\ & \qquad\qquad + \int_\Omega \varphi(x)d\mu, \quad \forall\varphi \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \textit{ telle que} \\ & \qquad\qquad\qquad -\mathrm{div}\,({}^tA\nabla\varphi) \in C_c^\infty(\Omega) \textit{ et } {}^tA\nabla\varphi.\mathrm{n} = 0 \textit{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}\right. \tag{2.3.12}$$

Démonstration. On note $W_*^{1,p}(\Omega)$ (respectivement $H_*^1(\Omega)$) l'ensemble des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $H^1(\Omega)$) à moyenne nulle (f est à moyenne nulle si $\int_\Omega f(x)dx = 0$). Pour p fixé, $1 < p < \infty$, on note $q = p/p - 1$.

On introduit le problème dual suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1_*(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega {}^tA(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \langle f, \varphi\rangle_{(H^1_*)', H^1_*}, \quad \forall \varphi \in H^1_*(\Omega), \end{array}\right. \tag{2.3.13}$$

où f appartient à $(H^1_*(\Omega))'$. Le résultat de régularité de Stampacchia, généralisé par J. Droniou au problème de Neumann, nous dit que l'application T_p, définie pour $p \geq 2$ par $T_p(f) = u$ pour tout $f \in (W^{1,q}_*(\Omega))'$, avec u l'unique solution du problème (2.3.13), est linéaire continue de $(W^{1,q}_*(\Omega))'$ dans $C(\overline{\Omega})$ dès que $p > N$. On a donc, si $p > N$,

$$T_p \ : \ (W^{1,q}_*(\Omega))' \to C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

Ainsi l'adjoint de T_p, que l'on note T_p^*, est défini sur $(C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega))'$ à valeur dans $W^{1,p}_*(\Omega)$. En particulier, T_p^* est défini sur $\mathcal{M}(\Omega) + (H^1(\Omega))'$ par densité de $C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ et $H^1(\Omega)$. On note de la même manière T_p^* et sa restriction à $\mathcal{M}(\Omega) + (H^1(\Omega))'$.

Soit $\eta \in \mathcal{M}(\Omega) + (H^1(\Omega))'$. Par définition de l'adjoint, P est l'unique solution de

$$\left\{\begin{array}{l} P \in W^{1,q}_*(\Omega) \\ \langle P, f\rangle_{W^{1,q}_*, (W^{1,q}_*)'} = \langle \eta, T_p(f)\rangle_{(C(\overline{\Omega})\cap H^1)', C(\overline{\Omega})\cap H^1}, \quad \forall f \in (W^{1,q}_*(\Omega))'. \end{array}\right.$$

P est donc aussi l'unique solution de

$$\left\{\begin{array}{l} P \in W^{1,q}_*(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega P(x)f(x)dx = \langle \eta, T_p(f)\rangle_{(C(\overline{\Omega})\cap H^1(\Omega))', C(\overline{\Omega})\cap H^1(\Omega)}, \quad \forall f \in C^\infty_c(\Omega). \end{array}\right.$$

Si $f \in C^\infty_c(\Omega)$, on pose $\varphi = T_p(f)$. P est donc l'unique solution de

$$\left\{\begin{array}{l} P \in W^{1,q}_*(\Omega), \\ \\ \displaystyle -\int_\Omega P(x)\mathrm{div}\,({}^tA(x)\nabla\varphi(x))dx = \langle \eta, T_p(f)\rangle \quad \forall \varphi \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \\ \qquad\qquad\qquad \text{telle que } -\mathrm{div}\,({}^tA\nabla\varphi) \in C^\infty_c(\Omega) \text{ et } {}^tA\nabla\varphi.n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

L'unicité de la solution et le fait que les espaces $W^{1,q}_*(\Omega)$ sont emboités permettent de montrer finalement que P ne dépend pas de $q < N/N-1$. En particulier pour $\eta \in \mathcal{M}(\Omega) + (H^1(\Omega))'$ défini par

$$\langle \eta, \varphi\rangle = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega \varphi(x)d\mu,$$

avec $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$, on obtient bien la formulation (2.3.12). ■

Remarque 2.3.1 *La linéarité de T_p^* montre que la solution P ainsi obtenue est la somme de la solution $T_p^*(\mu)$ et de la solution $T_p^*(f)$ où $f \in (H^1_*(\Omega))'$ est définie par*

$$\langle f, \varphi\rangle_{(H^1_*(\Omega))', H^1_*(\Omega)} = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx.$$

En particulier, comme $T_p^*(f) = T_p(f)$, on a

$$P = T_p^*(\mu) + T_p(f).$$

Pour résoudre le système, nous avons encore besoin du résultat de stabilité suivant

Proposition 2.3.5 (Stabilité) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (L^\infty(\Omega))^{N\times N}$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (L^2(\Omega))^N$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ et soit $A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N}$, $F \in (L^2(\Omega))^N$ et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. On suppose*
1. Il existe α et β, $\beta > \alpha > 0$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in M(\alpha,\beta,\Omega)$, $A \in M(\alpha,\beta,\Omega)$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers A.
2. $F_n \to F$ dans $(L^2(\Omega))^N$ quand $n \to \infty$.
3. $\mu_n \to \mu$ pour la topologie faible- de $\mathcal{M}(\Omega)$ quand $n \to \infty$.*
Soit u_n l'unique solution de (2.3.1) avec A_n, F_n et μ_n à la place de A, F et μ au sens de la Proposition 2.3.4. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique solution u de (2.3.1), au sens de la Proposition 2.3.4, dans $W^{1,q}(\Omega)$, pour tout $1 \le q < N/N-1$.

Pour la démonstration de ce résultat voir l'article [26]. La technique est assez semblable à celle de la démonstration de la Proposition 2.3.3.

2.4 Résolution du système régularisé

Avant de démontrer la Proposition 2.2.1, on commence par résoudre le cas où μ appartient à $L^2(\Omega)$ et φ est remplacée par φ_ε définie pour tout $s \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_\varepsilon(s) = \varphi(s) + \varepsilon s,$$

avec $\varepsilon > 0$, c'est-à dire le système (2.2.48).

2.4.1 Régularisation parabolique

Proposition 2.4.1 *On suppose (2.2.1)-(2.2.10) et $\mu \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une solution faible au problème (2.2.48), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9), au sens suivant*

$$\begin{gathered} u \in L^2((0,T);H^1(\Omega)), \\ u \in C[(0,T);L^2(\Omega)], \quad 0 \le u \le 1, \ \text{p.p. sur } \Omega, \end{gathered} \tag{2.4.1}$$

$$u_t \in L^2((0,T);(H^1(\Omega))'), \ \forall s > 2, \tag{2.4.2}$$

$$u(.,0) = u_0 \ \text{dans } L^2(\Omega), \tag{2.4.3}$$

$$P \in L^\infty((0,T);H^1(\Omega)), \ \int_\Omega P(x)dx = 0, \tag{2.4.4}$$

$$\begin{aligned}\langle u_t, v\rangle_{(H^1)',H^1} &+ \int_\Omega K\nabla\varphi_\varepsilon(u).\nabla v\ dx - \int_\Omega f(u)\mathrm{v}_T.\nabla v\ dx \\ &+ \int_\Omega h(u)KG.\nabla v\ dx + \int_\Omega u\, v\, b\, \mu\, dx - \int_\Omega v\, c\, a\, \mu\, dx = 0, \\ &\qquad\qquad \forall v \in H^1(\Omega),\ \ p.p.\ sur\ (0,T),\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

$$\mathrm{v}_T + m(u)K\left(\nabla P - F(x,u)\right) = 0,\ \ p.p.\ sur\ \Omega\times(0,T) \tag{2.4.6}$$

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \mathrm{v}_T(x,t).\nabla w(x)dx = \int_\Omega w(x)a(x,t)d\mu - \int_\Omega w(x)b(x,t)d\mu,& \\ \forall w \in H^1(\Omega),\ \ p.p.\ sur\ (0,T).&\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

La démonstration de cette proposition est rigoureusement la même que dans le cadre d'un écoulement miscible (c'est le but de la régularisation parabolique). On rappelle les grandes lignes de cette démonstration et les résultats intermédiaires importants.

Méthode du point fixe

On considère l'application S,

$$S : L^2((0,T);L^2(\Omega)) \to L^2((0,T);L^2(\Omega)),$$

définie de la manière suivante : pour $\overline{u} \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$, on commence par résoudre l'équation de la pression avec $\overline{u}$:

$$\begin{aligned}&P \in L^\infty((0,T);H^1(\Omega)), \qquad \int_\Omega P(x,t)\,dx = 0,\ \text{p.p. sur } (0,T), \\ &\int_\Omega m(\overline{u}(x,t))K(x)(\nabla P(x,t) - F(x,\overline{u}(x,t))).\nabla\psi(x)\,dx \\ &\qquad = \int_\Omega \psi(x)(a(x,t)\mu(x) - b(x,t)\mu(x))\,dx, \quad \forall\psi \in H^1(\Omega),\ \text{p.p. sur } (0,T).\end{aligned}$$

L'existence et l'unicité de P est une conséquence immédiate du théorème de Lax-Milgram. On définit $\overline{\mathrm{v}_T}$ par

$$\overline{\mathrm{v}_T}(x,t) = -m(\overline{u}(x,t))K(x)(\nabla P(x,t) - F(x,\overline{u}(x,t))), \quad \text{p.p. sur } \Omega\times(0,T).$$

Alors, il existe une unique solution au problème suivant

$$\begin{aligned}&u \in L^2((0,T);H^1(\Omega)) \cap C[(0,T);L^2(\Omega)], \\ &u_t \in L^2((0,T);(H^1(\Omega))'), \\ &u(.,0) = u_0,\end{aligned}$$

$$\langle u_t, v\rangle_{(H^1)',H^1} + \int_\Omega K\nabla\varphi_\varepsilon(u).\nabla v\ dx - \int_\Omega f(u)\overline{\mathrm{v}_T}.\nabla v\ dx$$
$$+ \int_\Omega h(u)KG.\nabla v\ dx + \int_\Omega u\, v\, b\ d\mu - \int_\Omega v\, c\, a\ d\mu = 0, \qquad (2.4.8)$$
$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \text{p.p. sur } (0,T).$$

L'existence et l'unicité de u est classique, voir [39]. On définit S par $S(\overline{u}) = u$. S est alors bien définie.

La démonstration de l'exitence pour le système (2.2.48) consiste donc à démontrer l'existence d'un point fixe pour S. Il faut donc montrer que cette application est continue et compacte de $L^2((0,T);L^2(\Omega)) \to L^2((0,T);L^2(\Omega))$, et appliquer le Théorème de Schauder.

Estimations *a priori*

Toute la démonstration repose sur les estimations *a priori* qui suivent. Les premières estimations concernent P est $\overline{\mathrm{v}_T}$. Elles découlent de la partie précédente (étude du problème elliptique associé).

Proposition 2.4.2 *On suppose (2.2.1)-(2.2.10) et $\mu \in L^2(\Omega)$. Alors, pour tout $\overline{u} \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$, P et $\overline{\mathrm{v}_T}$ vérifient*

1. *Il existe $C_1 > 0$ dépendant seulement de $\|a\|_{L^\infty((0,T);C(\overline{\Omega}))}$, $\|b\|_{L^\infty((0,T);C(\overline{\Omega}))}$, $\|\mu\|_{L^2}$, α et β telle que*
$$\|\nabla p\|_{L^\infty((0,T);(L^2(\Omega))^N)} \le C_1, \quad \|\overline{\mathrm{v}_T}\|_{L^\infty((0,T);(L^2(\Omega))^N)} \le C_1. \qquad (2.4.9)$$
2. *Pour tout $q < N/(N-1)$, il existe une constante C_2 dépendant seulement de $\|a\|_{L^\infty((0,T);C(\overline{\Omega}))}$, $\|b\|_{L^\infty((0,T);C(\overline{\Omega}))}$, $\|\mu\|_{(W^{1,p})'}$, α, β et q telle que*
$$\|\nabla p\|_{L^\infty((0,T);(L^q(\Omega))^N)} \le C_2, \quad \|\overline{\mathrm{v}_T}\|_{L^\infty((0,T);(L^q(\Omega))^N)} \le C_2. \qquad (2.4.10)$$

Sur $u = S(\overline{u})$, les estimations sont de trois types différents, une estimation L^∞ (il est essentiel que la saturation reste comprise entre 0 et 1), une estimation de l'énergie et une estimation des dérivées en temps de u.

Proposition 2.4.3 (Estimations L^∞) *On suppose (2.2.1)-(2.2.10) et $\mu \in L^2(\Omega)$. Alors, pour tout $\overline{u} \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$, $u = S(\overline{u})$ vérifie presque partout sur $\Omega\times(0,T)$*
$$0 \le u \le 1. \qquad (2.4.11)$$

La première inégalité, $u \ge 0$, se démontre en prenant $-u^-(.,t)$ comme fonction test dans (2.4.8). Grâce à la propriété de la perméabilité relative, à savoir que $f(s) = 0$ et $h(s) = 0$ si $s \le 0$, les termes qui pouvaient poser problème sont nuls.

La deuxième partie de l'inégalité est un peu plus difficile. On prend cette fois $v = (u-1)^+$ dans (2.4.8). Comme $h(s) = 0$ si $s \ge 1$,
$$\int_\Omega h(u(x,t))K(x)G(x).\nabla(u(x,t)-1)^+\,dx = 0.$$

De plus $f(s) = 1$ si $s \geq 1$, donc

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega & f(u(x,t))\overline{\mathrm{v}_T}.\nabla(u(x,t)-1)^+\,dx \\
&= -\int_\Omega \overline{\mathrm{v}_T}(x,t).\nabla(u(x,t)-1)^+\,dx \\
&= \int_\Omega (a(x,t)\mu(x) - b(x,t)\mu(x))(u(x,t)-1)^+\,dx.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient en prenant $(u-1)^+$ dans (2.4.8),

$$\begin{aligned}
\langle u_t(.,t),(u(.,t)-1)^+\rangle_{(H^1)',H^1} &+ \int_\Omega \varphi'_\varepsilon(u)K(x)\nabla(u(x,t)-1)^+.\nabla(u(x,t)-1)^+\,dx \\
= \int_\Omega ((c(x,t)-1)a(x,t)\mu(x) &- (u(x,t)-1)b(x,t)\mu(x))(u(x,t)-1)^+\,dx.
\end{aligned}$$

On a par hypothèse, $c(x,t) \leq 0$, et a et b sont des fonctions positives. Le membre de gauche est donc négatif. De plus $\varphi_\varepsilon > 0$, donc en intégrant la relation précédente entre 0 et s par rapport à la variable t, on obtient

$$\|(u(.,t)-1)^+\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(u_0-1)^+\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui donne bien le résultat voulu.

Proposition 2.4.4 (Estimations $L^2((0,T);H^1(\Omega))$) *On suppose (2.2.1)-(2.2.10) et et $\mu \in L^2(\Omega)$. Alors, pour tout $\overline{u} \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$, $u = S(\overline{u})$ vérifie, pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{L^2} &+ 2\varepsilon\,\alpha \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x,\tau)|^2 dx\,d\tau \\
&\leq \|u_0\|^2_{L^2} + C_3 \int_0^t (1 + \|a(.,\tau)\mu\|_{L^1} + \|b(.,\tau)\mu\|_{L^1})d\tau,
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

où C_3 est une constante positive dépendant de β, f, h, Ω, ε et G.

Cette estimation s'obtient en prenant $u(.,t)$ comme fonction test dans (2.4.8). On détaille juste l'étude des deux termes dont la majoration n'est pas évidente :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega & f(u(x,t))\overline{\mathrm{v}_T}.\nabla u(x,t)\,dx \\
&= \int_\Omega \overline{\mathrm{v}_T}.\nabla \tilde{F}(u(x,t))\,dx \\
&= \int_\Omega (a(x,t)\mu(x) - b(x,t)\mu(x))\tilde{F}(u(x,t))\,dx,
\end{aligned}$$

où $\tilde{F}$ est une primitive de f. On conclut pour ce terme en utilisant la borne L^∞ trouvée précédemment.

Enfin le terme correctif de gravité rajoute une difficulté supplémentaire comparé à l'article [31] :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega h(u(x,t))K(x)G(x).\nabla u(x,t)\,dx\right| \\ &\leq \beta(\sup_{[0,1]}|h|)\int_\Omega |G.\nabla u(x,t)\,dx| \\ &\leq C_3'\left(\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\,dx\right)^{1/2},\end{aligned}$$

avec C_3' qui dépend de β, h, $\lambda(\Omega)$ et G. On conclut en utilisant l'inégalité de Young.

Enfin, la dernière estimation est

Proposition 2.4.5 *On suppose (2.2.1)-(2.2.10) et $\mu \in L^2(\Omega)$. Alors, pour tout $\overline{u} \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$, $u = S(\overline{u})$ vérifient*

1. *Il existe $C_4 > 0$ dépendant seulement de $\|a\|_{L^\infty((0,T);C(\overline{\Omega}))}$, $\|b\|_{L^\infty((0,T);C(\overline{\Omega}))}$, $\|\mu\|_{L^2}$, ε, α et β telle que*
$$\|u_t\|_{L^2((0,T);(H^1(\Omega))')} \leq C_4. \tag{2.4.13}$$
2. *Pour tout $p > N$, il existe $C_5 > 0$ dépendant seulement de $\|a\|_{L^\infty((0,T);C(\overline{\Omega}))}$, $\|b\|_{L^\infty((0,T);C(\overline{\Omega}))}$, $\|\mu\|_{L^1}$, ε, α, β et p telle que*
$$\|u_t\|_{L^2((0,T);(W^{1,p})')} \leq C_5. \tag{2.4.14}$$

Ces estimations sont suffisantes pour obtenir l'exitence d'un point fixe pour l'application S, mais pas pour passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Existence d'une solution

Pour démontrer l'existence d'un point fixe, il faut vérifier que l'application S est continue, puis que sont image est relativement compacte dans $L^2((0,T);L^2(\Omega))$.

Les démonstrations de ces deux points sont identiques aux démonstrations de l'article [31], tout le travail ayant été fait dans les estimations *a priori*.

L'application S admet donc un point fixe, ce qui démontre bien l'existence d'une solution faible $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ au problème (2.2.48), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9).

2.4.2 Démonstration de la Proposition 2.2.1

Il s'agit cette fois de passer à la limite dans les équations quand $\varepsilon \to 0$. Les estimations démontrées dans la partie précédente sont insuffisantes. En particulier l'estimation en energie dépend fortement de ε.

Des estimations *a priori*, encore !

Proposition 2.4.6 *On suppose (2.2.1)-(2.2.10) et $\mu \in L^2(\Omega)$. Soit $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ une solution du problème (2.2.48), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9). Alors Il existe une fonction* *continue $c_1(t)$ ne dépendant que de α, β, a, b, $\|\mu\|_{L^1}$ telle que*

$$\int_0^t \|\nabla\varphi(u_\varepsilon(.,\tau))\|_{L^2}^2 d\tau \leq c_1(t).$$

Preuve. On prend $\varphi(u_\varepsilon)$ comme fonction test dans (2.4.5) :

$$\begin{aligned}\langle (u_\varepsilon)_t, \varphi(u_\varepsilon)\rangle_{(H^1)',H^1} + \int_\Omega K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon).\nabla\varphi(u_\varepsilon)\,dx - \int_\Omega f(u_\varepsilon)(\mathrm{v}_T)_\varepsilon.\nabla\varphi(u_\varepsilon)\,dx \\ + \int_\Omega h(u_\varepsilon)KG.\nabla\varphi(u_\varepsilon)\,dx + \int_\Omega u_\varepsilon\,\varphi(u_\varepsilon)\,b\,\mu\,dx - \int_\Omega \varphi(u_\varepsilon)\,c\,a\,\mu\,dx = 0,\end{aligned}$$

où $(\mathrm{v}_T)_\varepsilon(x,t) = -m(u_\varepsilon(x,t))K(x)(\nabla P_\varepsilon(x,t) - F(x,u_\varepsilon(x,t)))$. On a donc, en utilisant la norme L^∞ de u_ε,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon).\nabla\varphi(u_\varepsilon)\,dxd\tau \\ &\quad\leq -\langle (u_\varepsilon)_t(.,\tau), \varphi(u_\varepsilon(.,\tau))\rangle + \left|\int_\Omega f(u_\varepsilon)\mathrm{v}_T.\nabla\varphi(u_\varepsilon)\,dx\right| \\ &\qquad + \left|\int_\Omega h(u_\varepsilon)KG.\nabla\varphi(u_\varepsilon)\,dx\right| + \left|\int_\Omega (u_\varepsilon\,\varphi(u_\varepsilon)\,b - \varphi(u_\varepsilon)\,c\,a)\mu\,dx\right| \\ &\quad\leq -\langle (u_\varepsilon)_t(.,\tau), \varphi(u_\varepsilon(.,\tau))\rangle + \|\mathrm{v}_T\|_{L^2}\|\nabla\varphi(u_\varepsilon)\|_{L^2} \\ &\qquad\qquad + C\|\nabla\varphi(u_\varepsilon)\|_{L^2} + \|a(.,\tau)\mu\|_{L^1} + \|b(.,\tau)\mu\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Pour démontrer le résultat final, à savoir le Théorème 4, on veut vraiment que la majoration de $\|\nabla\varphi(u_\varepsilon)\|_{L^2}$ ne dépende que de la norme L^1 de μ. Or, ici on a fait apparaître $\|\mathrm{v}_T\|_{L^2}$ qui dépend de la norme L^2 de μ. Il faut donc améliorer ce passage :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f(u_\varepsilon(x,\tau))(\mathrm{v}_T)_\varepsilon(x,\tau).\nabla\varphi(u_\varepsilon(x,\tau))\,dx \\ &\quad= \int_\Omega (\mathrm{v}_T)_\varepsilon(x,\tau).\nabla\tilde{\phi}(u_\varepsilon(x,\tau))\,dx \\ &\quad= \int_\Omega (a(x,\tau)\mu(x) - b(x,\tau)\mu(x))\tilde{\phi}(u_\varepsilon(x,\tau))\,dx,\end{aligned}$$

où $\tilde{\phi}$ désigne une primitive de $f\varphi'$. De plus, on sait que

$$\int_0^t \langle (u_\varepsilon)_t(.,\tau), \varphi(u_\varepsilon(.,\tau))\rangle d\tau = \|\Phi(u_\varepsilon(.,t))\|_{L^2} - \|\Phi(u_0(.))\|_{L^2},$$

où Φ est une primitive de la fonction φ. Ainsi, en utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Young, puis en intégrant l'inégalité entre 0 et t, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\alpha\int_0^t \|\nabla\varphi(u_\varepsilon)\|_{L^2}^2 d\tau \\ &\quad\leq \|\Phi(u_0(.))\|_{L^2} + \frac{C^2}{2\alpha}t + C'\int_0^t (\|a(.,\tau)\mu\|_{L^1} + \|b(.,\tau)\mu\|_{L^1})d\tau.\end{aligned}$$

On trouve bien le résultat annoncé. ∎

On peut déjà avoir un résultat de compacité faible pour la suite $(\varphi(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ dans l'espace $L^2((0,T);H^1(\Omega))$, mais cela n'est toujours pas suffisant pour obtenir une saturation convenable à la limite. On désire en fait avoir une convergence forte de $(\varphi(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ dans $L^2((0,T);L^2(\Omega))$. Comme il n'y a pas d'espoir de majorer la dérivée en temps de $\varphi(u_\varepsilon)$, on s'intéresse à ses translatées en temps.

Proposition 2.4.7 *On suppose (2.2.1)-(2.2.10) et $\mu \in L^2(\Omega)$. Soit $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ une solution du problème (2.2.48), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9). Alors il existe une constante γ, indépendante de ε telle que, pour tout*

$$\int_0^{T-s}\int_\Omega |\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t)|^2 dxdt \leq \gamma\sqrt{s}.$$

Preuve. On commence par constater que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T-s}\int_t^{t+s} \langle (u_\varepsilon)_t(.,\tau), \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon(.,\tau))\rangle_{H^{-1},H_0^1} d\tau dt \\
&\quad = \int_0^{T-s}\int_\Omega (u_\varepsilon(t+s)-u_\varepsilon(t))(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))dxdt
\end{aligned}$$

On prend maintenant $v = (\varphi_\varepsilon((u_\varepsilon)_\tau)(.,t+s) - \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(.,t))$ comme fonction test dans l'équation (2.4.5) (avec $u_\varepsilon(x,\tau)$), que l'on intègre entre t et $t+s$ par rapport à la τ puis entre 0 et $T-s$ par rapport à t. Ainsi, d'après ce que l'on vient d'écrire

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T-s}\int_t^{t+s} \langle (u_\varepsilon)_t(.,\tau), (\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))\rangle_{H^{-1},H_0^1} d\tau dt \\
&\quad = -\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).(\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))d\tau dxdt \\
&\qquad + \int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} f(u_\varepsilon(x,\tau))(\mathrm{v}_T)_\varepsilon.\nabla(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))d\tau dxdt. \\
&\qquad - \int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} h(u_\varepsilon(x,\tau))KG.\nabla(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))d\tau dxdt \\
&\qquad + \int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} c(x,\tau)a(x,\tau)\mu(x)(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))\, d\tau dxdt \\
&\qquad - \int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} u_\varepsilon(x,\tau)b(x,\tau)\mu(x))(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))\, d\tau dxdt.
\end{aligned}$$

On s'intéresse à chacun des termes séparément. Les derniers termes ne posent pas de problème particulier grâce à l'estimation L^∞. Par exemple, il existe une constante C, ne dépendant que de $\|b\|_{L^\infty((0,T);C(\overline{\Omega}))}$ et $\|\mu\|_{L^1}$, telle que

$$\left|\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} u_\varepsilon(\tau)b(\tau)\mu(x))(\varphi_\varepsilon(u_n)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_n)(t))\, d\tau dxdt\right| \leq Cs.$$

On s'intéresse au premier terme du membre de droite de l'équation. On applique l'inégalité d'Hölder, d'abord en espace, puis par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).(\nabla\varphi(u_n)(t+s)-\nabla\varphi(u_n)(t))d\tau dxdt\right| \\
&\quad\leq \int_0^{T-s}\int_t^{t+s}\beta\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi(u_n)(t+s)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\,dt \\
&\qquad+\int_0^{T-s}\int_t^{t+s}\beta\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi(u_n)(t)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\,dt \\
&\quad\leq \beta\int_0^{T-s}\left(\int_t^{t+s}\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\left(\|\nabla\varphi(u_n)(t+s)\|^2_{L^2(\Omega)}s\right)^{1/2}dt \\
&\qquad+\beta\int_0^{T}\left(\int_t^{t+s}\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\left(\|\nabla\varphi(u_n)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}s\right)^{1/2}dt \\
&\quad\leq \beta\sqrt{s}\int_0^{T-s}\left(\int_0^{T}\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\|\nabla\varphi(u_n)(t+s)\|_{L^2(\Omega)}dt \\
&\qquad+\beta\sqrt{s}\int_0^{T}\left(\int_0^{T}\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\|\nabla\varphi(u_n)(t)\|_{L^2(\Omega)}dt \\
&\quad\leq 2\beta\sqrt{s}\|\nabla\varphi(u_n)\|^2_{L^2(Q)}
\end{aligned}$$

Il ne reste donc que les termes de transport de l'équation. Le terme de gravité est assez simple à majorer :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} h(u_\varepsilon(\tau))KG.\nabla(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))d\tau dxdt\right| \\
&\qquad\leq \beta\|G\|_\infty\|h\|_\infty\left(\int_0^{T-s}\int_\Omega(|\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)|+|\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))|)dxdt\right)s.
\end{aligned}$$

Le terme qui reste nécessite de faire intervenir la norme L^2 de μ. La technique utilisée dans les démonstrations précédente, à savoir faire intervenir l'équation vérifiée par la vitesse de filtration, est malheureusemment ici impossible à mettre en oeuvre. On majore donc ce terme sans subtilité en utilisant la norme $L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$ de v_T.

Remarque : si les matrices K_n sont symétriques, on peut améliorer l'estimation en $\sqrt{s}$ (en utilisant en quelque sorte une “compensation” entre les différents termes). On effectue le calcul suivant :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).(\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))d\tau dxdt\\
&\quad=\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)d\tau dxdt\\
&\qquad-\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t)d\tau dxdt\\
&\quad=\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)d\tau dxdt\\
&\qquad-\int_0^{T}\int_\Omega\int_{(\tau-s)^+}^{\min(\tau,T-s)} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t).\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau)dtdxd\tau\\
&\quad=\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)d\tau dxdt\\
&\qquad-\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_{t^+}^{\min(t+s,T-s)} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)d\tau dxdt\\
&\quad=\int_{T-2s}^{T-s}\int_\Omega\int_{T-s}^{t+s} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)d\tau dxdt\\
&\qquad-\int_{-s}^{0}\int_\Omega\int_0^{t+s} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)d\tau dxdt.
\end{aligned}
$$

On peut maintenant majorer chaque terme facilement :

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{T-2s}^{T-s}\int_\Omega\int_{T-s}^{t+s} K\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(\tau).\nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)d\tau dxdt\right|\\
&\qquad\le\beta\int_{T-2s}^{T-s}\int_{T-s}^{t+s}\|\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon(.,\tau))\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon(.,t))\|_{H_0^1(\Omega)}d\tau dt\\
&\qquad\le\beta\|\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L^2((0,T),H_0^1(\Omega))}s.
\end{aligned}
$$

La majoration est analogue pour le deuxième terme.

On conclut en utilisant le fait que φ est localement lipschitzienne, pour tout $s\in]0,1[$:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T-s}\int_\Omega|\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t)|^2dxdt\\
&\quad\le C\int_0^{T-s}\int_\Omega(u_\varepsilon(t+s)-u_\varepsilon(t))(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t+s)-\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))dxdt\\
&\quad\le\gamma\sqrt{s}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, les translatées en temps convergent uniformément vers 0 quand $s\to 0$. ■

Passage à la limite dans (2.2.48)

Cette fois, les estimations sont suffisantes pour passer à la limite dans le système régularisé. En effet, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $(u_\varepsilon,P_\varepsilon)$ solution du système (2.2.48).

La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega\times(0,T))$, donc il existe une fonction $u\in L^\infty(\Omega\times(0,T)\times(0,1))$ telle que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u au sens de la convergence non-linéaire faible* de $L^\infty(\Omega \times (0,T))$, c'est-à-dire pour toute fonction $g \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, pour tout $\psi \in L^1(\Omega \times (0,T))$,

$$\int_0^T \int_\Omega g(u_\varepsilon(x,t))\psi(x,t)\,dxdt \to \int_0^1 \int_0^T \int_\Omega g(u(x,t,s))\psi(x,t)\,dxdtds,$$

quand $\varepsilon \to 0$.

D'après les deux propositions précédentes, les translatées en temps et en espace de $\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ converge vers 0. La suite $(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ est donc compacte dans $L^2(\Omega \times (0,T))$. Comme $\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ converge vers $\varphi(u(x,t,s))$ au sens non-linéaire faible*, cela implique que $\varphi(u)$ ne dépend pas de s.

Remarque : l'utilisation ici de la notion de processus (voir [29]) n'est pas certes indispensable mais l'existence de la limite u n'est pas dépendante des hypothèses particulières faites sur la fonction φ. Ce résultat permet de traiter des équations paraboliques vraiment dégénérées (voir [30]). On utilise maintenant la bijectivité de φ pour passer à la limite dans le système (2.2.48).

Par construction, la fonction φ possède les propriétés suivantes :
- $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$,
- pour tout $s \in]0,1[$, $\varphi'(s) > 0$.

En particulier φ est une fonction bijective. On peut supposer, après une éventuelle extraction de suite, que $(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converge vers $\varphi(u)$ presque partout sur $\Omega\times(0,T)$. On en déduit donc que la suite $(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converge également presque partout sur $\Omega \times (0,T)$ vers u.

Ce résultat est suffisant pour conclure. En effet, il faut maintenant vérifier que l'on peut passer à la limite dans chacune des équations. On peut en particulier utiliser le résultat de stabilité établi dans la partie précédente pour conclure que la suite (P_ε) converge fortement dans $H^1(\Omega)$ vers P solution de

$$\mathrm{v}_T + m(u)K\left(\nabla P - F(x,u)\right) = 0, \text{ p.p. sur } \Omega \times (0,T) \tag{2.4.15}$$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \mathrm{v}_T(x,t).\nabla w(x)dx = &\int_\Omega w(x)a(x,t)\mu(x)\,dx \\ &- \int_\Omega w(x)b(x,t)\mu(x)\,dx,\ \forall w \in H^1(\Omega),\ \text{p.p. sur } (0,T). \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

De même, le passage à la limite dans (2.4.5), se fait sans aucun problème grâce à la convergence forte de la vitesse de filtration. On ne détaille pas plus cette partie.

Ainsi, on a établi l'existence d'une solution (u,P) au problème (2.1.4), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9) avec $\mu \in L^2(\omega)$. ■

2.5 Démonstration du Théorème 4

On s'intéresse maintenant au cas $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$.

La démonstration présentée se déroule en 3 étape. La première étape consiste à approcher la mesure μ par des fonctions assez régulière. On construit dans la deuxième étape un problème approché qui admet une solution grâce à la Proposition 2.2.1 et on conclut en passant à la limite sur le problème approché, grâce entre autre au résultat de stabilité énoncé dans la partie 2.3.2. On ne fait pas la preuve en entier, les étapes étant souvent très proches de l'article [31].

Etape 1. Construction de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de noyau régularisant, c'est-à-dire $\rho_n(x) = n^N\rho(nx)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $n \in \mathbb{N}$, où $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dx = 1 \quad \text{et} \quad (|x| \geq 1 \Rightarrow \rho(x) = 0).$$

On pose $\mu_n = (\rho_n * \tilde{\mu})_{|\Omega}$, où $\tilde{\mu}$ est le prolongement de μ par 0 sur $\mathbb{R}^N$ tout entier. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \in L^2(\Omega)$, $\mu_n \geq 0$ presque partout sur Ω, et $\|\mu_n\|_{L^1} \leq \mu(\Omega)$. Il ne reste qu'à démontrer que $\mu_n \to \mu$ quand $n \to \infty$ pour la topologie faible* de $\mathcal{M}(\Omega)$, c'est-à-dire que pour toute fonction $\psi \in C(\overline{\Omega})$, quand $n \to \infty$,

$$\int_\Omega \psi(x)\mu_n(x)\,dx \to \int_\Omega \psi(x)\,d\mu(x).$$

On commence par démontrer ce résultat pour les fonctions $\psi \in C_c(\Omega)$, c'est-à-dire les fonctions continues à support compact dans Ω. En effet, soit $\psi \in C_c(\Omega)$, on peut prolonger ψ par 0 sur $\mathbb{R}^N$ tout entier ; on note $\tilde{\psi}$ ce prolongement. On a alors

$$\int_\Omega \psi(x)\mu_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\psi}(x)\rho_n * \tilde{\mu}(x)\,dx.$$

Donc, quand $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\psi}(x)\rho_n * \tilde{\mu}(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\psi}(x)\,d\tilde{\mu}(x) = \int_\Omega \psi(x)\,d\mu(x).$$

De plus, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n * \tilde{\mu}(x)\,dx = \mu(\Omega)$$

et

$$\int_{\Omega^c} \rho_n * \tilde{\mu}(x)\,dx \leq \mu(A_n),$$

où $A_n = \{x \in \Omega,\ d(x, \Omega^c) \leq 1/n\}$ et $d(x, \Omega^c) = \inf\{|x - y|,\ y \notin \Omega\}$.
Comme $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, on a $\mu(A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Ainsi, quand $n \to \infty$

$$\int_\Omega \mu_n(x)\,dx \to \mu(\Omega).$$

Ce résultat permet d'obtenir

$$\int_\Omega \psi(x)\mu_n(x)\,dx \to \int_\Omega \psi(x)\,d\mu(x),$$

pour tout $\psi \in C(\overline{\Omega})$ et non plus seulement pour $\psi \in C_c(\Omega)$. La première étape est donc terminée.

Etape 2. Le problème approché

On ne peut pas malheureusement se contenter de remplacer μ par μ_n dans le système (2.1.4) car toutes les hypothèses ne sont pas forcément vérifiées. Plus précisement, il faut modifier la fonction a afin de vérifier la condition (2.2.10). On définit les fonctions ε_n et a_n de la manière suivante, pour tout $t \in (0, T)$,

– Si $\displaystyle\int_\Omega a d\mu_n = \int_\Omega b d\mu_n$, on pose

$$\varepsilon_n = 0 \quad \text{et} \quad a_n(.,t) = a(.,t).$$

– Si $\displaystyle\int_\Omega a d\mu_n < \int_\Omega b d\mu_n$, on pose

$$\varepsilon_n = \frac{\displaystyle\int_\Omega (b(x,t) - a(x,t))\mu_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega \mu_n(x)\,dx} \quad \text{et} \quad a_n(.,t) = a(.,t) + \varepsilon_n(t).$$

– Si $\displaystyle\int_\Omega a d\mu_n > \int_\Omega b d\mu_n$, on pose

$$\varepsilon_n = \frac{\displaystyle\int_\Omega (a(x,t) - b(x,t))\mu_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega a(x,t)\mu_n(x)\,dx} \quad \text{et} \quad a_n(.,t) = a(.,t)(1 - \varepsilon_n(t)).$$

La fonction a_n ainsi construite permet de vérifier l'hypothèse (2.2.10), c'est-à-dire

$$\int_\Omega a_n(x,t)\mu_n(x)\,dx = \int_\Omega b(x,t)\mu_n(x)\,dx, \quad \text{p.p. sur } (0,T).$$

De plus $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty((0,T))$ et $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(u_n, P_n, (\mathrm{v}_T)_n)$ solution faible au problème (2.1.4), (2.1.7), (2.1.8) et (2.1.9) avec μ_n à la place de μ et a_n à la place de a (c'est le résultat de la Proposition 2.2.1). $(u_n, P_n, (\mathrm{v}_T)_n)$ vérifie

$$\begin{gathered} \varphi(u_n) \in L^2((0,T); H^1(\Omega)), \\ u_n \in C[(0,T); L^2(\Omega)], \quad 0 \le u_n \le 1, \text{ p.p. sur } \Omega, \end{gathered} \tag{2.5.1}$$

$$(u_n)_t \in L^2((0,T); (H^1(\Omega))'), \ \forall s > 2, \tag{2.5.2}$$

$$u_n(.,0) = u_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \tag{2.5.3}$$

$$P_n \in L^\infty((0,T); H^1(\Omega)), \ \int_\Omega P_n(x)dx = 0, \tag{2.5.4}$$

$$\begin{aligned}\langle (u_n)_t, v\rangle_{(H^1)',H^1} + \int_\Omega K\nabla\varphi(u_n).\nabla v\ dx - \int_\Omega f(u_n)(\mathrm{v}_T)_n.\nabla v\, dx \\ + \int_\Omega h(u_n)KG.\nabla v\ dx + \int_\Omega u_n\, v\, b\, \mu_n\, dx - \int_\Omega v\, c\, a_n\, \mu_n\, dx = 0, \qquad (2.5.5)\\ \forall v \in H^1(\Omega),\ \text{p.p. sur } (0,T),\end{aligned}$$

$$(\mathrm{v}_T)_n + m(u_n)K\left(\nabla P_n - F(x,u_n)\right) = 0,\ \text{p.p. sur } \Omega\times(0,T) \qquad (2.5.6)$$

$$\begin{aligned}-\int_\Omega (\mathrm{v}_T)_n(x,t).\nabla w(x)dx = \int_\Omega w(x)a_n(x,t)\mu_n(x)\, dx \\ - \int_\Omega w(x)b(x,t)\mu_n(x)\, dx,\ \forall w\in H^1(\Omega),\ \text{p.p. sur } (0,T).\end{aligned} \qquad (2.5.7)$$

On ne peut pas utiliser le même raisonnement que dans la partie précédente pour obtenir de la compacité sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, les estimations des translatées en temps font intervenir la norme L^2 de μ_n. On utilise donc l'hypothèses (2.2.12) sur la fonction φ.

En effet, en supposant que la réciproque de φ, φ^{-1}, est ρ-höldérienne, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{2/\rho}((0,T);W^{\theta\rho,2/\rho}(\Omega))$ pour tout θ, $0<\theta<1$ (voir [53]). Ainsi il existe $u\in L^{2/\rho}((0,T);W^{\theta\rho,2/\rho}(\Omega))$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u faiblement, à une sous-suite près.

De plus la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0,T);(W^{1,p})'(\Omega))$, pour tout $p>N$. Il existe donc un certain $r<2$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $L^r((0,T)\times\Omega)$. On peut donc supposer, après extraction, que cette suite converge presque partout vers u. C'est le résultat qui nous interesse.

Enfin, grâce à l'estimation $L^\infty((0,T)\times\Omega)$, on peut obtenir tous les résultats voulus sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Etape 3. Passage à la limite dans le système 2.1.4

On commence par démontrer la convergence forte de toute la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $L^\infty((0,T);W^{1,q}(\Omega))$, pour tout $q<N/(N-1)$. Pour cela, on applique le résultat de stabilité de la Proposition 2.3.5.

Pour presque tout $t\in(0,T)$, on a, quand $n\to\infty$,

$$m(u_n(.,t))K(.) \to m(u(.,t))K(.) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

$$F(.,u_n(.,t)) \to F(.,u(.,t)) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

De plus, comme $\mu_n\to\mu$ pour la topologie faible* de $\mathcal{M}(\Omega)$ et $\varepsilon_n(t)\to 0$ pour presque tout $t\in(0,T)$ quand $n\to\infty$,

$$(a_n(.,t)-b(.,t))\mu_n \to (a(.,t)-b(.,t))\mu$$

pour la topologie faible* de $\mathcal{M}(\Omega)$.

On peut donc exactement appliquer la Proposition 2.3.5. Ainsi il existe un unique P appartenant à $L^\infty((0,T);W^{1,q}(\Omega))$, pour tout $q < N/(N-1)$, tel que

$$P_n(.,t) \to P(.,t) \quad \text{dans } W^{1,q}(\Omega),\ \forall q < N/(N-1),\ \text{p.p. sur } (0,T).$$

On peut alors passer à la limite dans l'autre équation, c'est-à-dire (2.5.5). Cette étude est exactement la même que dans l'article [31], on laisse au lecteur le soin de s'en convaincre. ■

2.6 Ecoulements immiscibles "simples"

On s'intéresse maintenant au système (2.1.5). Il s'agit juste de montrer que la méthode consistant à rajouter de la diffusion dans l'équation sur la saturation ne permet pas de conclure.

On considère le système suivant, avec $\mu \in L^2(\Omega)$ (ce n'est pas le problème...),

$$\begin{cases} u_t + \text{div } (f(u)\mathrm{v}_T) - \text{div}\,(h(u)KG) = ca\mu - ub\mu \\ \\ \mathrm{v}_T + m(u)K\,(\nabla P - F(x,u)) = 0 \\ \\ \text{div } (\mathrm{v}_T) = a\mu - b\mu \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, on effectue une régularisation parabolique :

$$\begin{cases} u_t + \text{div } (f(u)\mathrm{v}_T) - \text{div}\,(h(u)KG) + \varepsilon\Delta u = ca\mu - ub\mu \\ \\ \mathrm{v}_T + m(u)K\,(\nabla P - F(x,u)) = 0 \\ \\ \text{div } (\mathrm{v}_T) = a\mu - b\mu \end{cases}$$

On est alors ramené à l'étude précédente. Il est encore possible d'effectuer le travail de la partie 2.4.1, à savoir obtenir l'existence d'une solution à ce problème grâce à une méthode de point fixe.

Le problème, c'est que les estimations en energie sont inutilisables pour passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$. Seule l'estimation L^∞ permet d'avoir un résultat de compacité, mais très faible (processus, convergence non linéaire faible*...).
Une convergence trop faible sur la suite de solution u_ε ne permet de trouver un problème limite satisfaisant. En effet, considérons juste l'équation de la pression :

$$-\text{div } (m(u_\varepsilon)K\,(\nabla P_\varepsilon - F(x,u_\varepsilon))) = a\mu - b\mu.$$

Pour espérer passer à la limite dans cette équation, il faut un résultat de stabilité suffisant. En anticipant sur le chapitre suivant, il se trouve que le seul résultat qui pourrait permettre de conclure est l'utilisation de la H-convergence de la matrice

$m(u_\varepsilon)K$. On démontre dans le chapitre suivant la stabilité faible de cette équation quand la matrice H-converge. Ainsi, il est possible de définir une pression à la limite, mais cette pression ne vérifie pas une équation du type

$$-\text{div}\ (m(u)K\,(\nabla P - F(x,u))) = a\mu - b\mu,$$

mais plutôt du type

$$-\text{div}\ \left(\tilde{K}\left(\nabla P - \tilde{F}\right)\right) = a\mu - b\mu.$$

En gros, le problème limite ne fait plus apparaître les perméabilités relatives.

De plus, dans un cas simple où l'on suppose que $m(s) = 1$, on pourrait espérer conclure, mais le terme de gravité $F(x,u_\varepsilon)$ empêche d'avoir suffisament de régularité sur la pression P_ε et par suite la vitesse de filtration v_T, ce qui est catastrophique pour l'équation de transport en u_ε.

Des travaux récents de R. Eymard utilisant un schéma numérique, ce qui revient un peu au même, on rajoute de la diffusion numérique, montre que l'on peut dans certain cas précis trouver un problème limite, mais le résultat est analogue, à savoir que ce problème limite n'est pas le problème original que l'on voulait résoudre !

Chapitre 3

Homogénéisation

Le but de ce chapitre est de reprendre la notion de H-convergence introduite par L. Tartar et F. Murat pour tenter de résoudre le problème de l'homogénéisation pour les modèles d'écoulements diphasiques introduits dans le chapitre précédent. La définition de la H-convergence que nous présentons est légèrement différente de la définition originale, c'est pourquoi nous prenons soin de rappeler la démonstration du théorème de compacité de l'ensemble $M(\alpha, \beta)$ pour cette convergence. Nous présentons ensuite des résultats inédits et intéressants sur le sujet (homogénéisation pour des équations elliptiques avec second membre mesure, pour des équations paraboliques dégénérées) avant d'étudier les deux modèles d'écoulements diphasiques en milieu poreux avec termes sources mesures.

3.1 Présentation de la H-convergence

3.1.1 Le problème de l'homogénéisation

Rappelons pour commencer le but de l'homogénéisation dans un cas simple.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne. Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$, coercitives (il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $A_n\xi.\xi \geq \alpha|\xi|^2$). Pour chaque entier n, on considère le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A_n\nabla u_n) = f \text{ dans } \Omega \\ u_n \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

D'après les hypothèses, ce problème admet une solution faible $u_n \in H_0^1(\Omega)$ (classique grâce au théorème de Lax-Milgram). Cela définit donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H_0^1(\Omega)$.

Si de plus la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition suivante : il existe α et β deux réels, $\beta > \alpha > 0$, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n\xi.\xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{et} \quad |A_n\xi| \leq \beta|\xi| \quad \text{ p.p.},$$

alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc supposer, à une sous-suite près, qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

Dans la suite on notera $M(\alpha, \beta, \Omega)$ l'ensemble des matrices de $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$ vérifiant cette propriété, c'est-à-dire

$$M(\alpha,\beta,\Omega) = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N} \mid \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ A\xi.\xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } |A\xi| \leq \beta|\xi| \text{ p.p.}\}$$

La question que l'on se pose en homogénéisation est la suivante :

<u>la limite u est-elle solution d'une équation du même type que u_n ?</u>

Plus précisément, existe-t-il une matrice $A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N}$, limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un certain sens, indépendante de f, telle que u est solution faible du nouveau problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

En effet, pour l'instant, les extractions dépendantes de f *a priori.*

Remarque 3.1.1 *Le mot "homogénéisation" provient du fait que l'on espère obtenir à la limite une matrice présentant moins d'hétérogénéité que les matrices de la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(c'est d'ailleurs parfois le cas, voir les exemples, mais malheureusement pas toujours). Cette question est importante pour les schémas numériques, il peut se produire des phénomènes d'intervertion de limite qui ne sont pas commutatifs, nous détaillons un exemple dans le paragraphe suivant. Cela permet également de réaliser des schémas numériques moins "couteux"...*

Ce problème ne se pose pas évidemment que pour le problème de Dirichlet cité prédemment. La motivation de ce travail est d'ailleurs d'étudier l'homogénéisation pour les systèmes modélisants des écoulements polyphasiques en milieu poreux introduit au chapitre pécédent ; les conditions aux bords sont alors plutôt du type Neumann et les équations elliptiques et paraboliques. Cette étude fait l'objet des parties 3.3 et 3.4.

3.1.2 Exemple en dimension 1

On se place tout d'abord dans le cas où $N = 1$, on peut alors résoudre entièrement le problème.

Soit $\Omega =]0,1[$. Soient α et β deux réels tels que $\beta > \alpha > 0$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction $a_n \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\alpha \leq a_n \leq \beta, \quad \text{presque partout.}$$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le problème suivant

$$\begin{cases} -(a_n u')' = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique solution u_n a ce problème. Les questions sont donc

- Existe-il u tel que $u_n \to u$ quand $n \to \infty$?
- De quel problème u est solution ?

Soit u_n la solution de (3.1.1). On a $a_n u_n' \in H^1(\Omega)$ et il existe une constante c_n telle que

$$a_n(x)u_n'(x) = -\int_0^x f(t)dt + c_n \quad \text{p.p. } x \in]0,1[,$$

donc

$$u_n(x) = \int_0^x -\frac{1}{a_n(y)} \int_0^y f(t)dtdy + \int_0^x \frac{c_n}{a_n(y)}dy.$$

$u_n(1) = 0$, donc on peut calculer c_n :

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{a_n(y)} \int_0^y f(t)dtdy}{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{a_n(y)}dy}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\alpha} \quad \text{p.p.}$$

Donc la suite $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. On peut donc supposer, après extraction d'une sous-suite, qu'il existe $b \in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$\frac{1}{a_n} \to b \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible-* quand } n \to \infty.$$

On peut vérifier que la fonction b satisfait également la condition

$$\frac{1}{\beta} \leq b \leq \frac{1}{\alpha} \quad \text{p.p.}$$

On pose $a = 1/b$, a appartient bien à $L^\infty(\Omega)$ et

$$\alpha \leq a \leq \beta, \quad \text{p.p.}$$

On montre facilement que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$c = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{a(y)} \int_0^y f(t)dtdy}{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{a(y)}dy},$$

et que par suite, pour tout $x \in [0,1]$, $u_n(x) \to u(x)$ avec

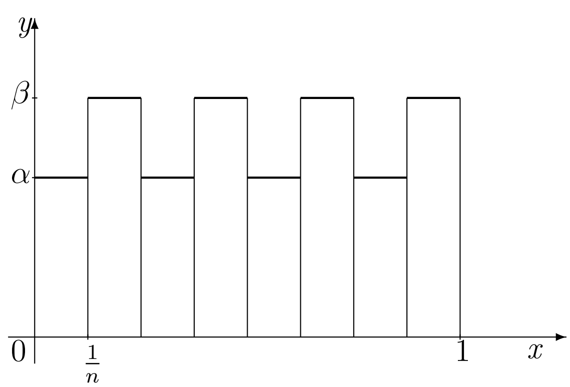
$$u(x) = -\int_0^x \frac{1}{a(y)} \int_0^y f(t)dtdy + \int_0^x \frac{c}{a(y)}dy.$$

En particulier cela signifie que u est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} -(au')' = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Le problème en dimension 1 est donc entièrement résolu.

Remarque : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, on peut donc également supposer, à une sous-suite près, qu'il existe $\bar{a}$ tel que $a_n \to \bar{a}$ L^∞-faible*. En général, on a $\bar{a} \neq a$! Par exemple, si l'on prend pour fonction a_n, la fonction suivante



On a

$$\begin{cases} \bar{a} = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \text{et} \\ a = \dfrac{2}{1/\alpha + 1/\beta} = \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

La question n'est donc pas si évidente, plusieurs limites sont possibles pour la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut trouver la bonne !

Problème pour les schémas numériques

On se place précisément dans le cadre que l'on vient d'introduire :
Soit $\Omega =]0,1[$. Soient α et β deux réels tels que $\beta > \alpha > 0$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et on considère une fonction $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\alpha \leq a \leq \beta, \quad \text{presque partout.}$$

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -(au')' = f & \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = 1/(N+1)$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, ..., N+1$. On note u_h la solution approchée de (3.1.3) obtenue par la méthode des Eléments Finis P1 correspondant aux points x_i. Si la fonction a est assez régulière, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on peut récupérer de la régularité H^2 sur la solution u. Dans ce cas précis, on sait que la suite $(u_h)_{h>0}$ converge vers u et que l'on a l'estimation d'erreur suivante

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq 2h \left(\frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=0}^{N} \|u''\|^2_{L^2(]x_i, x_{i+1}[)} \right)^{1/2}.$$

Soit $M \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varepsilon = 1/(2M)$ et on considère la suite de fonction a_ε définie exactement comme dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire $a_\varepsilon(x) = \alpha$ si $2i\varepsilon < x < (2i+1)\varepsilon$, pour $i \in \{0, ..., M-1\}$ et $a_\varepsilon(x) = \beta$ sur les autres intervalles.

Pour tout M, le problème (3.1.3) avec a_ε à la place de a admet aussi une solution faible. On note u_ε cette solution.

On discrétise cette équation avec les mêmes Elément Finis que tout à l'heure. On note $u_{\varepsilon,h}$ la solution approchée.
Pour $h = 2k\varepsilon$ avec un certain k entier non nul, on peut montrer que $u_{\varepsilon,h}$ est aussi la solution approchée de (3.1.3) (toujours avec les mêmes EF) avec $a(x) = \bar{m}$ pour tout $x \in]0,1[$, où $\bar{m} = (\alpha+\beta)/2$. Comme a est alors une constante, on en déduit que

$$\|u_{\varepsilon,h} - \bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq 2h \frac{\|f\|_{L^2(]0,1[)}}{\bar{m}},$$

où $\bar{u}$ est la solution de (3.1.3) avec $a = \bar{m}$.

On a vu dans la partie précédente que la suite de solution faible u_ε converge uniformément sur $]0,1[$ vers la solution $\underline{u}$ de (3.1.3) avec $a = \underline{m} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Il se trouve que la fonction $u_{\varepsilon,h}$ n'est pas une très bonne approximation de u_ε ; en particulier, on peut démontrer que

$$\|u_{\varepsilon,h} - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \geq \|\bar{u} - \underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} - \|u_\varepsilon - \underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} - 2h \frac{\|f\|_{L^2(]0,1[)}}{\bar{m}}.$$

Alors que l'approximation (toujours avec les mêmes EF) de $\underline{u}$ est une meilleur approximation de u_ε car elle vérifie

$$\|u_\varepsilon - \underline{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_\varepsilon - \underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} + 2h \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{\bar{m}}.$$

Cet exemple montre bien l'intérêt de réussir à connaitre le problème homogénéisé pour les schémas numériques.

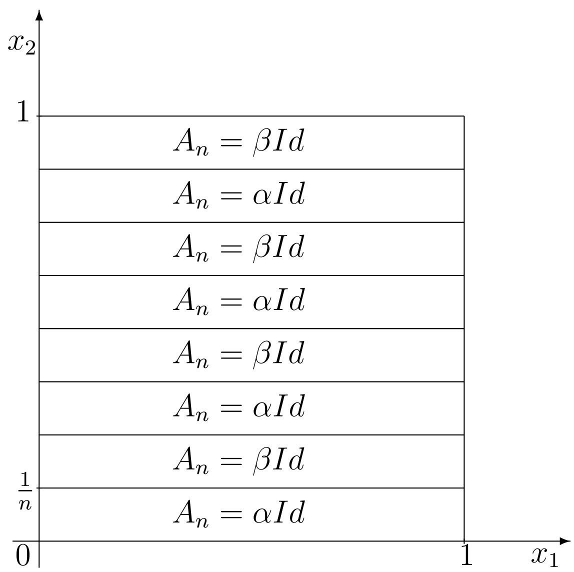
3.1.3 Exemple en dimension supérieure

Pour $N > 1$, il est beaucoup plus difficile de trouver la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En fait à part quelques rares cas où les matrices sont périodiques, on ne sait pas vraiment faire.

On se place dans le cas où $N = 2$, $\Omega =]0,1[^2$. Soit f appartenant à $L^2(\Omega)$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A_n \nabla u_n) = f \text{ dans } \Omega \\ u_n \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où les matrices A_n sont définies comme suit :



On peut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des solutions converge dans $H_0^1(\Omega)$-faible vers la fonction u solution du problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A \nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où la matrice A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}.$$

Cet exemple montre qu'un milieu localement isotrope peut tendre vers un milieu anisotrope.

En fait, il existe toujours une limite pour la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convient, c'est la notion de H-convergence que l'on va développer dans la partie suivante, le seul problème, c'est que le procédé d'obtention de cette limite n'est pas constructif. Ainsi, il existe toujours une matrice A qui convient mais on ne sait pas la construire...

3.1.4 La H-convergence

Définition 3.1.1 (H-convergence "simple") *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $M(\alpha,\beta,\Omega)$, pour α et β donnés, $\beta>\alpha>0$, et A un élément de $M(\alpha,\beta,\Omega)$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-converge vers A (on note $A_n \overset{H}{\rightharpoonup} A$) si pour tout f dans $H^{-1}(\Omega)$, la solution faible u_n de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A_n\nabla u_n) = f \text{ dans } \Omega,\\ u_n \in H^1_0(\Omega), \end{cases}$$

vérifie

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ faible quand } n\to\infty,\\ A_n\nabla u_n \rightharpoonup A\nabla u \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible quand } n\to\infty, \end{cases}$$

où u est l'unique solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega,\\ u \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

La notion de H-convergence est due à L. Tartar et F. Murat (voir [43], [45] et [57]). Il s'agit en fait d'une généralisation au cas non symétrique de la G-convergence introduit par S. Spagnolo dans [55]. La définition donnée ici est un peu différente (d'où le mot "simple"). La H-convergence trouve sa raison d'être dans le théorème de compacité qui suit.

Le théorème de compacité

Théorème 5 (Compacité) *Soit α et β deux réels, $\beta>\alpha>0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $M(\alpha,\beta,\Omega)$. Alors il existe une sous-suite, encore notée $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe un élément A de $M(\alpha,\beta^2/\alpha,\Omega)$ tels que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A au sens de la H-convergence.*

Remarques :
- Si les matrices A_n sont symétriques, le résultat est un peu meilleur, la limite A est encore symétrique et elle est dans l'ensemble $M(\alpha,\beta,\Omega)$.
- Ce n'est qu'un théorème d'existence de A, la question "comment trouver A" reste ouverte...

Démonstration. La démonstration se déroule en 3 étapes.

Soit α et β deux réels, $\beta>\alpha>0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $M(\alpha,\beta,\Omega)$. Pour $f\in H^{-1}(\Omega)$, il existe u_n solution de

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A_n\nabla u_n.\nabla v\,dx = \langle f,v\rangle_{H^{-1},H^1_0}, \quad \forall v\in H^1_0(\Omega),\\ u_n\in H^1_0(\Omega). \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Etape 1. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En prenant $v = u_n$ comme fonction test dans (3.1.4), on obtient :

$$\alpha \|u_n\|_{H_0^1}^2 \leq \|f\|_{H^{-1}} \|u_n\|_{H_0^1}$$

(on prend la norme du gradient sur $H_0^1(\Omega)$). Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$; on peut donc extraire une sous-suite convergente. Seulement l'extraction dépend de f, ce que l'on ne veut pas. Dans la suite, on va considérer plusieurs fonctions et les solutions associées à chaque fonction. On note donc $u_n(f)$ la solution u_n de (3.1.4) quand le second membre est égale à f.

$H_0^1(\Omega)$ est un espace séparable réflexif, donc son dual $H^{-1}(\Omega)$ l'est aussi. Donc il existe E une partie dénombrable dense dans $H^{-1}(\Omega)$.

Soit $f \in E$. Par un procédé diagonal, il existe une sous-suite indépendante de f, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $u \in H_0^1(\Omega)$, tel que

$$u_n \to u \text{ dans } H_0^1(\Omega) - \text{faible.}$$

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Il existe une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers f. Soit $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\langle \varphi, u_n(f)\rangle - \langle \varphi, u_m(f)\rangle = &\langle \varphi, u_n(f_p)\rangle - \langle \varphi, u_m(f_p)\rangle \\ &+\langle \varphi, u_n(f) - u_n(f_p)\rangle - \langle \varphi, u_m(f) - u_m(f_p)\rangle\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\langle \varphi, u_n(f)\rangle - \langle \varphi, u_m(f)\rangle| \leq &|\langle \varphi, u_n(f_p)\rangle - \langle \varphi, u_m(f_p)\rangle| \\ &+\frac{\|\varphi\|_{H^{-1}}}{\alpha}\|f - f_p\|_{H^{-1}} + \frac{\|\varphi\|_{H^{-1}}}{\alpha}\|f - f_p\|_{H^{-1}}\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit p tel que

$$\frac{\|\varphi\|_{H^{-1}}}{\alpha}\|f - f_p\|_{H^{-1}} \leq \varepsilon.$$

f_p appartient à E, donc il existe n_0 tel que, pour tous n et m, $n, m \geq n_0$ implique

$$|\langle \varphi, u_n(f_p)\rangle - \langle \varphi, u_m(f_p)\rangle| \leq \varepsilon.$$

Finalement $(\langle \varphi, u_n(f)\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $\varphi \in H^{-1}$. On appelle $l(\varphi)$ la limite.

$$|\langle \varphi, u_n(f)\rangle| \leq \frac{\|f\|_{H^{-1}}}{\alpha}\|\varphi\|_{H^{-1}},$$

donc

$$|l(\varphi)| \leq \frac{\|f\|_{H^{-1}}}{\alpha}\|\varphi\|_{H^{-1}},$$

c'est-à-dire $l \in (H^{-1})'$. Donc il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$l(\varphi) = \langle \varphi, u\rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Ainsi, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe une sous-suite de $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, indépendante du choix de f, et il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que cette sous-suite converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

On montre également que $(A_n \nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^N$. La même technique donne encore l'existence d'une sous-suite (indépendante de f), encore notée $(A_n \nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et σ dans $(L^2(\Omega))^N$ tels que

$$A_n \nabla u_n \to \sigma \text{ faiblement dans } (L^2(\Omega))^N \text{ quand } n \to +\infty.$$

Résumé : il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\sigma \in (L^2(\Omega))^N$ tels que

$$\begin{cases} u_{\psi_n} \to u \text{ dans } H_0^1 - \text{faible} \\ A_{\psi_n} u_{\psi_n} \to \sigma \text{ dans } (L^2(\Omega))^N - \text{faible.} \end{cases}$$

Objectif : on cherche $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ (indépendant de f) tel que $\sigma = A\nabla u$ presque partout. Cela suffit pour conclure. En effet u_n est solution de (3.1.4). On peut passer à la limite dans cette équation, donc pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \sigma.\nabla v \; dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Ainsi si $\sigma = A\nabla u$, on a exactement u solution de

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A\nabla u.\nabla v \; dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Etape 2. Etude d'un problème adjoint.

Pour toute matrice B, on note ${}^tB$ sa transposée. Le même travail qu'à l'étape précédente assure que l'on peut supposer qu'il existe une extraction de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (qui ne sera pas notée), telle que, pour tout $g \in H^{-1}(\Omega)$, il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ et $\eta \in (L^2(\Omega))^N$ tels que la suite des solutions v_n du problème

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega {}^tA_n \nabla v_n.\nabla w \; dx = \langle g, w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \\ v_n \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.1.5}$$

vérifie

$$\begin{cases} v_n \to v \text{ dans } H_0^1 - \text{faible} \\ {}^tA_n v_n \to \eta \text{ dans } (L^2(\Omega))^N - \text{faible.} \end{cases}$$

On note T l'application :

$$\begin{aligned} T : \quad H^{-1}(\Omega) &\to H_0^1(\Omega) \\ g &\to v \end{aligned}$$

On va démontrer que T est un opérateur linéaire continu et bijectif.

La linéarité est évidente car l'application $g \to v_n$ est linéaire.
La continuité. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_\Omega {}^tA_n \nabla v_n . \nabla v_n \; dx = \langle g, v_n \rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

donc

$$\alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\alpha \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \right) \leq \langle g, v \rangle \leq \|g\|_{H^{-1}} \|v\|_{H_0^1}.$$

Donc

$$\|v\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha} \|g\|_{H^{-1}},$$

donc T est continue et

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H^{-1},H_0^1)} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

La bijectivité. Soit $w \in H_0^1(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n appartient à $M(\alpha,\beta,\Omega)$, donc

$${}^tA_n \nabla v_n . \nabla w = A_n \nabla w . \nabla v_n \leq \beta |\nabla w| |\nabla v_n|, \text{ p.p.}$$

donc

$$\langle g, w \rangle_{H^{-1},H_0^1} \leq \beta \|v_n\|_{H_0^1} \|w\|_{H_0^1},$$

d'où

$$\|g\|_{H^{-1}} \leq \beta \|v_n\|_{H_0^1}.$$

D'autre part

$$\int_\Omega {}^tA_n \nabla v_n . \nabla v_n \; dx = \langle g, v_n \rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

donc

$$\langle g, v_n \rangle_{H^{-1},H_0^1} \geq \alpha \|v_n\|^2_{H_0^1} \geq \frac{\alpha}{\beta^2} \|g\|^2_{H^{-1}}.$$

$v_n \to v$ dans H_0^1-faible quand $n \to \infty$, donc

$$\langle g, v \rangle_{H^{-1},H_0^1} \geq \frac{\alpha}{\beta^2} \|g\|^2_{H^{-1}},$$

c'est-à-dire que, pour tout $g \in H^{-1}(\Omega)$, on a

$$\langle g, T(g) \rangle_{H^{-1},H_0^1} \geq \frac{\alpha}{\beta^2} \|g\|^2_{H^{-1}}.$$

Ce résultat suffit pour montrer que l'application T est bijective. Tout d'abord, l'application T est injective car $T(g) = 0$ implique $g = 0$.
L'image de T est fermée car

$$\|g\|_{H^{-1}} \leq \frac{\beta^2}{\alpha} \|T(g)\|_{H^{-1}}.$$

Si $\mathrm{Im}(T) \neq H_0^1(\Omega)$, alors il existe $g \in H^{-1}(\Omega)$, $g \neq 0$ tel que (Théorème de Hahn-Banach)

$$\langle g, w \rangle_{H^{-1},H_0^1} = 0, \quad \forall w \in \mathrm{Im}(T).$$

En particulier, pour $w = T(g)$, on obtient $g = 0$. Donc $\mathrm{Im}(T) = H_0^1(\Omega)$.

Finalement, on a bien démontré que l'application T est linéaire continue et bijective.

Etape 3. Identification de A.

L'idée de la démonstration est maintenant de passer à la limite dans l'expression $A_n\nabla u_n.\nabla v_n$ de deux manières différentes grâce aux équations vérifiées par u_n et v_n, puis de trouver A en choisissant convenablement g.

Soit f et g appartenant à $H^{-1}(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère u_n solution de (3.1.4) et v_n solution de (3.1.5). D'après ce qui précéde, il existe une extraction indépendante de f et g (on ne note pas cette extraction), u et v dans $H_0^1(\Omega)$ et σ et η dans $(L^2(\Omega))^N$ tels que
- $u_n \to u$ dans H_0^1-faible quand $n \to \infty$,
- $u_n \to u$ dans L^2 quand $n \to \infty$ (Rellich...),
- $v_n \to v$ dans H_0^1-faible quand $n \to \infty$,
- $v_n \to v$ dans L^2 quand $n \to \infty$,
- $A_n\nabla u_n \to \sigma$ dans $(L^2)^N$-faible quand $n \to \infty$,
- ${}^tA_n\nabla v_n \to \eta$ dans $(L^2)^N$-faible quand $n \to \infty$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A_n(x)\nabla u_n(x).\nabla v_n(x)\varphi(x)dx \\
&\qquad = \int_\Omega A_n\nabla u_n.\nabla(v_n\varphi)dx - \int_\Omega v_nA_n\nabla u_n.\nabla\varphi\ dx \\
&\qquad = \langle f, v_n\varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1} - \int_\Omega v_nA_n\nabla u_n.\nabla\varphi\ dx.
\end{aligned}$$

On peut passer à la limite dans la dernière expression. De plus, on a l'égalité suivante

$$\langle f, \varphi v\rangle = \int_\Omega \sigma.\nabla(\varphi v)\ dx,$$

d'où

$$\int_\Omega A_n(x)\nabla u_n(x).\nabla v_n(x)\varphi(x)dx \overset{n\to+\infty}{\to} \int_\Omega \sigma(x).\nabla v(x)\,\varphi(x)dx.$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega {}^tA_n(x)\nabla v_n(x).\nabla u_n(x)\varphi(x)dx \\
&\qquad = \int_\Omega {}^tA_n\nabla v_n.\nabla(u_n\varphi)\ dx - \int_\Omega u_n{}^tA_n\nabla v_n.\nabla\varphi\ dx \\
&\qquad = \langle g, u_n\varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1} - \int_\Omega u_n{}^tA_n\nabla v_n.\nabla\varphi\ dx.
\end{aligned}$$

Ce qui donne quand on passe à la limite

$$\int_\Omega {}^tA_n(x)\nabla v_n(x).\nabla u_n(x)\varphi(x)dx \overset{n\to+\infty}{\to} \int_\Omega \eta(x).\nabla u(x)\times\varphi(x)dx.$$

Ainsi

$$\sigma.\nabla v = \eta.\nabla u$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc presque partout finalement.

Il faut maintenant choisir g convenablement pour construire A. Soit K un compact inclus dans Ω. Soit $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in K$. On voudrait que

$$v(x) = \psi(x)x_i.$$

On pose donc

$$g = T^{-1}(\psi(x)x_i).$$

Ainsi, on a pour tout i

$$\sigma_i = \eta.\nabla u,$$

avec η associé à $g = T^{-1}(\psi(x)x_i)$. On définit alors la matrice A par

$$a_{ij} = \eta_j.$$

On a donc défini sur K la $i^{\text{ième}}$ ligne de A. On a donc construit une matrice A telle que, presque partout sur K, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$,

$$\sigma = A\nabla u.$$

Pour définir A sur Ω tout entier on écrit qu'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts, $K_n \subset K_{n+1}$ tels que

$$\Omega = \bigcup_n K_n.$$

On a donc bien défini $A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N}$ tel que, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, on a presque partout sur Ω

$$\sigma = A\nabla u.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que A est unique et que A appartient à $M(\alpha, \beta^2/\alpha, \Omega)$.

<u>L'unicité.</u> On suppose qu'il existe deux éléments A et B de $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$ tels que, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$,

$$A\nabla u = B\nabla u. \tag{3.1.6}$$

Soit $K \subset \Omega$ compact et soit $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in K$. Soit $i \in \{1, ..., N\}$. On veut prendre $u(x) = \psi(x)x_i$. Le travail effectué dans la deuxième étape peut être refait pour montrer que l'application

$$\begin{aligned} S:\quad H^{-1}(\Omega) &\to H_0^1(\Omega) \\ f &\to u \end{aligned}$$

est linéaire continue et bijective. Il suffit maintenant de prendre $f = S^{-1}(u)$ avec $u(x) = \psi(x)x_i$, c'est possible ! Finalement on obtient que, pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, presque partout sur K

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

Donc $A = B$. La matrice A est donc bien définie de manière unique.

$\underline{A \in M(\alpha, \beta^2/\alpha, \Omega).}$ Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi(x) \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \varphi \, dx \leq \int_\Omega A_n \nabla u_n . \nabla u_n \times \varphi \, dx. \tag{3.1.7}$$

Comme précédemment, on peut démontrer que

$$\int_\Omega A_n \nabla u_n . \nabla u_n \times \varphi \, dx \to \int_\Omega \sigma . \nabla u \times \varphi \, dx$$

quand $n \to \infty$, à une sous-suite près. Seulement, d'après le choix de A, $\sigma = A\nabla u$. De plus $\sqrt{\varphi} \, \nabla u_n \to \sqrt{\varphi} \, \nabla u$ faiblement dans $(L^2(\Omega))^N$, donc en passant à la limite dans l'inégalité (3.1.7), on obtient pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi(x) \geq 0$,

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \varphi \, dx \leq \int_\Omega A \nabla u . \nabla u \times \varphi \, dx. \tag{3.1.8}$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}^N$. Soit $K \subset \Omega$ un compact et $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in K$. On prend $f = S^{-1}(x \mapsto \psi(x)\xi.x)$, c'est-à-dire

$$u(x) = \psi(x)\xi.x \; .$$

$\nabla u(x) = \xi$ presque partout sur K, ce qui donne dans (3.1.8)

$$\alpha |\xi|^2 \leq A\xi.\xi,$$

presque partout sur K, pour tout compact $K \in \Omega$. Finalement, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a presque partout sur Ω

$$\alpha |\xi|^2 \leq A\xi.\xi \; .$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A_n^{-1} vérifie, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$A_n^{-1}\xi.\xi \geq \frac{\alpha}{\beta^2}|\xi|^2.$$

Ainsi, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi(x) \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \int_\Omega |A_n \nabla u_n|^2 \varphi \, dx \leq \int_\Omega A_n^{-1} A_n \nabla u_n . A_n \nabla u_n \times \varphi \, dx.$$

Comme précédemment, on peut passer à la limite dans cette expression, à une sous-suite près, d'où

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \int_\Omega |A \nabla u|^2 \varphi \, dx \leq \int_\Omega \nabla u . A \nabla u \times \varphi \, dx.$$

Pour conclure, on pose une nouvelle fois $u(x) = \psi(x)\xi.x$, ce qui permet d'obtenir

$$\xi.A\xi \geq \frac{\alpha}{\beta^2}|A\xi|^2,$$

et donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, presque partout sur Ω,

$$|A\xi| \leq \frac{\beta^2}{\alpha}|\xi|,$$

ce qui termine la preuve. ■

Compléments. Il s'agit de démontrer le résultat annoncé en remarque, à savoir que si les matrices de la suite sont symétriques, la limite A est aussi une matrice symétrique de l'ensemble $M(\alpha, \beta, \Omega)$.

A symétrique. On reprend les notations de la troisième étape, c'est-à-dire que pour tout f et g dans $H^{-1}(\Omega)$, on considère les suites de solutions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces deux suites vérifient (après extraction), qu'il existe u et v dans $H_0^1(\Omega)$ et σ et η dans $(L^2(\Omega))^N$ tels que
- $u_n \to u$ dans H_0^1-faible,
- $A_n\nabla u_n \to \sigma$ dans $(L^2(\Omega))^N$-faible,
- $v_n \to v$ dans H_0^1-faible,
- ${}^tA_n\nabla v_n = A_n\nabla v_n \to \eta$ dans $(L^2(\Omega))^N$-faible.

De plus, on a démontré que $\sigma.\nabla v = \eta.\nabla u$. Par construction de la matrice A et comme pour tout n, A_n est symétrique, on a $\sigma = A\nabla u$ et $\eta = A\nabla v$. Ainsi

$$A\nabla u.\nabla v = A\nabla v.\nabla u \tag{3.1.9}$$

Soit un compact $K \subset \Omega$ et soit $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$. En choisissant $u(x) = \psi(x)x_i$ et $v(x) = \psi x_j$ (ce qui est possible car T et S sont bijectives) dans (3.1.9), on trouve $a_{ij} = a_{ji}$ presque partout sur K. A est donc bien symétrique.

Enfin, le dernier résultat, $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$, se démontre comme précédemment en utilisant juste le fait que les matrices étant symétriques, elles vérifient

$$A_n^{-1}\xi.\xi \geq \frac{1}{\beta}|\xi|^2.$$

Ainsi la matrice A est bien symétrique et $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$. ■

Commentaires

La démonstration du théorème de compacité permet de mettre en évidence la méthode couramment utilisée pour résoudre des problèmes d'homogénéisation :
- On considère une équation du type

$$-\mathrm{div}\,(A_n(\nabla u_n + F_n)) = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}',$$

pour un certain f et une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (de limite connue F). On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-converge vers un élément A.

La première étape consiste à obtenir suffisament d'estimations sur les solutions u_n des problèmes qui nous intéressent pour avoir de la compacité sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(A_n(\nabla u_n + F_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

– La seconde étape consiste à identifier la limite σ de la suite $(A_n(\nabla u_n + F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $A(\nabla u + F)$. Pour se faire on considère le problème adjoint suivant :
  Soit i un entier, $1 \le i \le N$. Soit ω un ouvert de Ω tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi(x) = 1$ sur ω. Soit v_n la solution du problème de Dirichlet suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega {}^t\!A_n(x)\nabla v_n(x).\nabla w(x)dx = \int_\Omega {}^t\!A(x)\nabla \psi_i(x).\nabla w(x)dx, \quad w \in H_0^1(\Omega), \\ v_n \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{3.1.10}$$

  où $\psi_i(x) = x_i\varphi(x)$, pour tout $x \in \Omega$ (on a $x = {}^t(x_1, ..., x_N)$). Il s'agit exactement de ce qui a été fait dans la troisième étape de la démonstration précédente, sauf que maintenant que l'on a défini la H-limite, l'application $g = T^{-1}(\psi_i)$ de $H^{-1}(\Omega)$ est exactement l'application

$$w \mapsto \int_\Omega {}^t\!A(x)\nabla\psi_i(x).\nabla w(x)dx.$$

  En particulier, on sait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $v = \psi_i$.
  Enfin on démontre que

$$A_n(\nabla u_n + F_n).\nabla v_n \to A(\nabla u + F).\nabla v \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega),$$

  et

$$A_n(\nabla u_n + F_n).\nabla v_n \to \sigma.\nabla v \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega),$$

  quand $n \to \infty$ en utilisant les équations vérifiées par u_n et v_n. Comme $v = \psi_i$, ceci termine la preuve.

Le passage à la limite dans l'expression $A_n\nabla u_n.\nabla v_n$ est souvent présenté comme une conséquence de la compacité par compensation (introduite également par L. Tartar et F. Murat, voir [44]). Cela n'est pas indispensable d'autant que la notion de compacité par compensation est postérieure à la H-convergence, mais cela permet de bien comprendre qu'il faut "contrôler" la divergence de l'expression $A_n(\nabla u_n+F_n)$ et ne pas séparer les termes.

3.2 Homogénéisation pour une équation parabolique dégénérée

Le résultat de l'homogénéisation pour une équation parabolique est bien connu, c'est d'ailleurs d'abord pour résoudre ce problème que S. Spagnolo a introduit la notion de G-convergence. Une façon très simple de se convaincre que le tenseur limite est le même dans le cas d'une équation parabolique consiste à discrétiser par rapport au temps. On peut également appliquer la méthode citée précédemment. C'est ce que nous allons faire dans le cadre un peu moins connu d'une équation parabolique dégénérée.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne. Soit $T > 0$. On considère le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u_t - \operatorname{div}(K\nabla\varphi(u)) = f \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{3.2.1}$$

où

$$f \in L^2(Q), \quad u_0 \in L^\infty(\Omega), \tag{3.2.2}$$

$$K \in M(\alpha, \beta, \Omega), \text{ pour } \alpha \text{ et } \beta \text{ donnés} \tag{3.2.3}$$

et

$$\varphi \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \varphi' \geq 0, \tag{3.2.4}$$

où $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions localement lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

L'existence d'une solution à ce problème est connue dans le cas où φ est bijective (la dérivée ne s'annule qu'en des points isolés, exemple $\varphi(s) = |s|^m s$, pour l'équation des milieux poreux). De très nombreux travaux existent sur le sujet, dûs notament à J. L. Lions, H. W. Alt, L. Di Benedetto, Ph. Bénilan et la liste est encore longue. On pourra consulter les travaux de H. W. Alt et S. Luckhaus, [4], ainsi que la thèse B. Andrianov, [9].

On rajoute donc cette hypothèse :

$$\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \text{ et } \varphi'(s) > 0, \ \forall s \in]0, 1[. \tag{3.2.5}$$

Proposition 3.2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne. Soit $T > 0$. On suppose (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) et (3.2.5). Alors il existe une solution faible u au problème (3.2.1) au sens suivant*

$$\varphi(u) \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega)) \tag{3.2.6}$$

$$u_t \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega)), \tag{3.2.7}$$

$$u \in C([0,T]; H^{-1}(\Omega)), \quad u(.,0) = u_0 \text{ } in \text{ } H^{-1}(\Omega), \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega K\nabla\varphi(u).\nabla v dx dt \\ &\quad = \int_0^T \int_\Omega f(x,t) v(x,t) dx dt, \ \forall v \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

La démonstration de cette proposition utilise la régularisation parabolique (appelée encore approximation parabolique visqueuse) de (3.2.1), c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on remplace φ par la fonction φ_ε définie, pour tout $s \in \mathbb{R}$, par

$$\varphi_\varepsilon(s) = \varepsilon s + \varphi(s).$$

L'équation parabolique obtenue n'est donc plus dégénérée. Ainsi il existe une solution $u_\varepsilon \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ (voir [39]). En prenant $\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ comme fonction test, on obtient suffisament d'estimations pour avoir la convergence faible de $(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$

dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Grâce à la technique présentée au chapitre 2 pour traiter la dégénérescence de l'équation de la saturation (pour démontrer la Proposition 2.4.7), on démontre la convergence forte de la suite $(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ afin d'avoir l'existence de u. On peut alors passer à la limite et trouver une solution u au problème initial.
A noter que le fait que $u_t \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$ n'est pas spécialement évident...

Cette proposition utilise donc la convergence forte de la suite $(\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$, c'est également ce que nous allons utiliser pour traiter le question de l'homogénéisation.

Proposition 3.2.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne. Soit $T>0$. On suppose (3.2.2), (3.2.4) et (3.2.5). Soit α et β dans $\mathbb{R}$ tels que $\beta > \alpha > 0$. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $M(\alpha,\beta,\Omega)$ qui H-converge vers un élément K de $M(\alpha,\beta,\Omega)$.*
Alors la solution faible u_n du problème (3.2.1), avec K_n à la place de K, converge presque partout vers u la solution du problème (3.2.1).

Preuve. La preuve se déroule en 2 étapes, d'abord les estimations et les résultats de convergence, puis on identifie la limite ainsi obtenue grâce à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ introduite dans la partie précédente.

Etape 1. Il s'agit dans un premier temps d'obtenir suffisament d'estimations pour avoir la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n\nabla\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On considère la solution faible u_n du problème (3.2.1), avec K_n à la place de K, donnée par la Proposition 3.2.1. On prend $\varphi(u_n)$ comme fonction test dans la formulation faible :

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, \varphi(u_n)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T\int_\Omega K_n\nabla\varphi(u_n).\nabla\varphi(u_n)dxdt \\ = \int_0^T\int_\Omega f(x,t)\varphi(u_n(x,t))dxdt.$$

On sait que

$$\int_0^t \langle (u_n)_t(.,\tau), \varphi(u_n(.,\tau))\rangle d\tau = \|\Phi(u_n(.,t))\|_{L^2} - \|\Phi(u_0(.))\|_{L^2},$$

où Φ est une primitive de la fonction φ. Ainsi, il existe $C>0$ tel que

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, \varphi(u_n)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \geq -C,$$

ce qui donne

$$\alpha\int_0^T\int_\Omega |\nabla\varphi(u_n(x,t))|^2 dxdt \leq C + \int_0^T\int_\Omega f(x,t)\varphi(u_n(x,t))dxdt.$$

On en déduit facilement que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$. Cette estimation est suffisante pour avoir la convergence faible des deux suites $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n\nabla\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut donc supposer que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ faible vers un certain l et que la suite $(K_n\nabla\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain σ dans $(L^2((0,T);(L^2(\Omega))^N)$ faible, le tout à une sous-suite près.
On va maintenant démontrer la convergence forte de $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(Q)$. En effet, on a, pour $s>0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{T-s}\int_t^{t+s}&\langle (u_n)_t(.,\tau),\varphi(u_n(.,\tau))\rangle_{H^{-1},H_0^1}d\tau dt\\ &=\int_0^{T-s}\int_\Omega (u_n(t+s)-u_n(t))(\varphi(u_n)(t+s)-\varphi(u_n)(t))dxdt\end{aligned}$$

On prend maintenant $v(.,t)=(\varphi(u_n)(.,t+s)-\varphi(u_n)(.,t))$ comme fonction test dans l'équation (avec $u(x,\tau)$), que l'on intègre entre t et $t+s$ par rapport à la τ puis entre 0 et $T-s$ par rapport à t. Ainsi, d'après ce que l'on vient d'écrire

$$\begin{aligned}\int_0^{T}\int_t^{t+s}&\langle (u_n)_t(.,\tau),(\varphi(u_n)(t+s)-\varphi(u_n)(t))\rangle_{H^{-1},H_0^1}d\tau dt\\ &=-\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s}K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).(\nabla\varphi(u_n)(t+s)-\nabla\varphi(u_n)(t))d\tau dxdt\\ &\quad+\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s}f(x,\tau)(\varphi(u_n)(t+s)-\varphi(u_n)(t))d\tau dxdt.\end{aligned}$$

On s'intéresse au premier terme du membre de droite de l'équation. On applique l'inégalité d'Hölder, d'abord en espace, puis par rapport au temps :

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s}K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).(\nabla\varphi(u_n)(t+s)-\nabla\varphi(u_n)(t))d\tau dxdt\right|\\ &\quad\le\int_0^{T-s}\int_t^{t+s}\beta\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi(u_n)(t+s)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\,dt\\ &\qquad+\int_0^{T-s}\int_t^{t+s}\beta\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi(u_n)(t)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\,dt\\ &\quad\le\beta\int_0^{T-s}\left(\int_t^{t+s}\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\left(\|\nabla\varphi(u_n)(t+s)\|^2_{L^2(\Omega)}s\right)^{1/2}dt\\ &\qquad+\beta\int_0^{T}\left(\int_t^{t+s}\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\left(\|\nabla\varphi(u_n)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}s\right)^{1/2}dt\\ &\quad\le\beta\sqrt{s}\int_0^{T-s}\left(\int_0^{T}\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\|\nabla\varphi(u_n)(t+s)\|_{L^2(\Omega)}dt\\ &\qquad+\beta\sqrt{s}\int_0^{T}\left(\int_0^{T}\|\nabla\varphi(u_n)(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\|\nabla\varphi(u_n)(t)\|_{L^2(\Omega)}dt\\ &\quad\le 2\beta\sqrt{s}\|\nabla\varphi(u_n)\|^2_{L^2(Q)}\end{aligned}$$

Remarque : si les matrices K_n sont symétriques, on peut améliorer cette estimation (en utilisant en quelque sorte une "compensation" entre les différents termes). On effectue le calcul suivant :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).(\nabla\varphi(u_n)(t+s)-\nabla\varphi(u_n)(t))d\tau dxdt\\
&\quad=\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).\nabla\varphi(u_n)(t+s)d\tau dxdt\\
&\qquad-\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).\nabla\varphi(u_n)(t)d\tau dxdt\\
&\quad=\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).\nabla\varphi(u_n)(t+s)d\tau dxdt\\
&\qquad-\int_0^{T}\int_\Omega\int_{(\tau-s)^+}^{\min(\tau,T-s)} K_n\nabla\varphi(u_n)(t).\nabla\varphi(u_n)(\tau)dtdxd\tau\\
&\quad=\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).\nabla\varphi(u_n)(t+s)d\tau dxdt\\
&\qquad-\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_{t^+}^{\min(t+s,T-s)} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).\nabla\varphi(u_n)(t+s)d\tau dxdt\\
&\quad=\int_{T-2s}^{T-s}\int_\Omega\int_{T-s}^{t+s} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).\nabla\varphi(u_n)(t+s)d\tau dxdt\\
&\qquad-\int_{-s}^{0}\int_\Omega\int_0^{t+s} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).\nabla\varphi(u_n)(t+s)d\tau dxdt.
\end{aligned}
$$

On peut maintenant majorer chaque terme facilement :

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{T-2s}^{T-s}\int_\Omega\int_{T-s}^{t+s} K_n\nabla\varphi(u_n)(\tau).\nabla\varphi(u_n)(t+s)d\tau dxdt\right|\\
&\quad\le\beta\int_{T-2s}^{T-s}\int_{T-s}^{t+s}\|\varphi(u_n(.,\tau))\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi(u_n(.,t))\|_{H_0^1(\Omega)}d\tau dt\\
&\quad\le\beta\|\varphi(u_n)\|_{L^2((0,T),H_0^1(\Omega))}s.
\end{aligned}
$$

La majoration est analogue pour le deuxième terme.

Enfin, en utilisant encore une fois des inégalités de Hölder, il est possible de montrer qu'il existe une constante C tel que

$$
\int_0^{T-s}\int_\Omega\int_t^{t+s} f(x,\tau)(\varphi(u_n)(t+s)-\varphi(u_n)(t))d\tau dxdt\le Cs.
$$

Donc il existe une constante, que l'on note encore C, telle que, pour tout s, $1>s>0$,

$$
0\le\int_0^{T-s}\int_\Omega(u_n(t+s)-u_n(t))(\varphi(u_n)(t+s)-\varphi(u_n)(t))dxdt\le C\sqrt{s}.
$$

La fonction φ est localement lipschitzienne, donc

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T-s}\int_\Omega|\varphi(u_n)(t+s)-\varphi(u_n)(t)|^2dxdt\\
&\quad\le\int_0^{T-s}\int_\Omega(u_n(t+s)-u_n(t))(\varphi(u_n)(t+s)-\varphi(u_n)(t))dxdt\\
&\quad\le C\sqrt{s}.
\end{aligned}
$$

Ainsi les translations en temps sont uniformément convergentes. Grâce à l'estimation $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ obtenue précédemment, on en déduit que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $L^2(Q)$ et dans $C([0,T],H^{-1}(\Omega))$ (voir [54]). On peut donc supposer que cette suite converge vers l dans $L^2(Q)$ et même presque partout dans Q, à une sous-suite près. En particulier, on ne déduit qu'il existe u tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers u et $l=\varphi(u)$ car φ est bijective.

Ainsi, en résumé, on a après un certain nombre d'extractions
- $K_n \overset{H}{\rightharpoonup} K$ quand $n\to\infty$,
- $u_n \to u$ presque partout dans Q quand $n\to\infty$.
- $\varphi(u_n)\rightharpoonup\varphi(u)$ dans $L^2((0,T),H_0^1(\Omega))$ faible quand $n\to\infty$.
- $\varphi(u_n)\to\varphi(u)$ dans $L^2((0,T)\times\Omega)$ fort quand $n\to\infty$.
- $K_n\nabla\varphi(u_n)\rightharpoonup\sigma$ dans $L^2((0,T);(L^2(\Omega))^N)$ faible quand $n\to\infty$.

On remarque au passage que l'on peut passer à la limite dans l'équation (3.2.1) :

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt+\int_0^T\int_\Omega \sigma.\nabla v dxdt \\ =\int_0^T\int_\Omega f(x,t)v(x,t)dxdt,\ \forall v\in L^2((0,T),H_0^1(\Omega)).$$

Il suffit donc de démontrer que $\sigma=K\nabla\varphi(u)$.

Etape 2. On introduit un problème adjoint.

Soit i un entier, $1\le i\le N$. Soit ω un ouvert de Ω tel que $\bar\omega\subset\Omega$ et soit $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi(x)=1$ sur ω. Soit v_n la solution du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega {}^tK_n(x)\nabla v_n(x).\nabla w(x)dx=\int_\Omega {}^tK(x)\nabla\psi_i(x).\nabla w(x)dx, \quad w\in H_0^1(\Omega),\\ v_n\in H_0^1(\Omega),\end{cases}$$

où $\psi_i(x)=x_i\varphi(x)$, pour tout $x\in\Omega$ (on a $x={}^t(x_1,...,x_N)$).

La suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-converge vers K. Donc la suite $({}^tK_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-converge vers ${}^tK$. Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers l'unique solution v du problème suivant

$$\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega {}^tK(x)\nabla v(x).\nabla w(x)dx=\int_\Omega {}^tK(x)\nabla\psi_i(x).\nabla w(x)dx, \quad w\in H_0^1(\Omega),\\ v\in H_0^1(\Omega),\end{cases}$$

On a donc $v=\psi_i$. On peut également supposer, quitte à considérer une nouvelle extraction, que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ψ_i dans $L^2(\Omega)$.

On calcule la limite dans $\mathcal{D}'([0,T]\times\Omega)$, de l'expression

$${}^tK_n\nabla v_n.\nabla\varphi(u_n)=K_n\nabla\varphi(u_n).\nabla v_n,$$

de deux manières différentes. Soit $\theta\in C_c^\infty([0,T]\times\Omega)$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega {}^tK_n(x)\nabla v_n(x).\nabla\varphi(u_n(x,t))\theta(x,t)dxdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega {}^tK_n(x)\nabla v_n(x).\nabla(\varphi(u_n(x,t))\theta(x,t))dxdt\\
&\quad -\int_0^T\int_\Omega {}^tK_n(x)\nabla v_n(x).\nabla\theta(x,t)\times\varphi(u_n(x,t))dxdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega {}^tK(x)\nabla\psi_i(x).\nabla(\varphi(u_n(x,t))\theta(x,t))dxdt\\
&\quad -\int_0^T\int_\Omega {}^tK_n(x)\nabla v_n(x).\nabla\theta(x,t)\times\varphi(u_n(x,t))dxdt.
\end{aligned}$$

On peut maintenant passer à limite dans chacun des termes :

- $\displaystyle\int_0^T\int_\Omega {}^tK\nabla\psi_i.\nabla(\varphi(u_n)\theta)dxdt \to \int_0^T\int_\Omega {}^tK\nabla\psi_i.\nabla(\varphi(u)\theta)dxdt$ quand $n\to\infty$.
- $\displaystyle\int_0^T\int_\Omega \varphi(u_n){}^tK_n\nabla v_n.\nabla\theta\ dxdt \to \int_0^T\int_\Omega \varphi(u){}^tK\nabla\psi_i.\nabla\theta\ dxdt$ quand $n\to\infty$.

Finalement $({}^tK_n\nabla v_n.\nabla\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'([0,T]\times\Omega)$ vers ${}^tK\nabla\psi_i.\nabla\varphi(u)$.

On utilise cette fois l'équation (3.2.1) pour calculer la limite de cette suite :

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega {}^tK_n(x)\nabla v_n(x).\nabla\varphi(u_n(x,t))\theta(x,t)dxdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega K_n(x)\nabla\varphi(u_n(x,t)).\nabla(v_n(x)\theta(x,t))dxdt\\
&\quad -\int_0^T\int_\Omega K_n(x)\nabla\varphi(u_n(x,t)).\nabla\theta(x,t)\times v_n(x)dxdt\\
&= -\int_0^T\langle(u_n)_t,v_n\theta\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt+\int_0^T\int_\Omega f(x,t)v_n(x)\theta(x,t)dxdt\\
&\quad -\int_0^T\int_\Omega K_n(x)\nabla\varphi(u_n(x,t)).\nabla\theta(x,t)\times v_n(x)dxdt
\end{aligned}$$

On peut également passer à la limite sur chacun des termes :

- $\displaystyle\int_0^T\langle(u_n)_t,v_n\theta\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt \to \int_0^T\langle u_t,\psi_i\theta\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt$ quand $n\to\infty$ (on intègre par partie par rapport au temps...).
- $\displaystyle\int_0^T\int_\Omega K_n\varphi(u_n).\nabla v_n\theta\ dxdt \to \int_0^T\int_\Omega \sigma.\nabla\psi_i\theta\ dxdt$ quand $n\to\infty$.

Ce qui donne finalement que la suite $({}^tK_n\nabla v_n.\nabla\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'([0,T]\times\Omega)$ vers $\sigma.\nabla\psi_i$. Par définition de ψ_i, cela nous donne bien le résultat voulu, à savoir que $\sigma=K\varphi(u)$ presque partout sur Q (car ω et i sont quelconques). ∎

3.3 Homogénéisation pour un problème de Neumann à donnée mesure

On s'intéresse à l'étude de l'homogénéisation pour le problème de Neumann suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A(x)(\nabla P(x) - F(x))) = \mu, \ \text{dans } \Omega, \\ \\ A(x)(\nabla P(x) - F(x)).\mathrm{n}(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

où $\mathrm{n}(x)$ désigne la normale extérieur à Ω au point x. Les hypothèses sont les suivantes

$$A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N} \text{ tel qu'il existe } \alpha \text{ et } \beta,\ \beta > \alpha > 0, \\ \text{pour lesquels } A \in M(\alpha, \beta, \Omega), \tag{3.3.2}$$

$$\mu \in \mathcal{M}(\Omega), \quad \mu(\Omega) = 0, \tag{3.3.3}$$

$$F = {}^t(F_1, ..., F_N) \in (L^2(\Omega))^N. \tag{3.3.4}$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de matrice de $M(\alpha, \beta, \Omega)$. On suppose qu'il existe une matrice A de $M(\alpha, \beta, \Omega)$ tel que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-converge vers A. Le but de cette partie est donc de démontrer que la solution P_n du problème (3.3.1) avec A_n à la place de A "converge" vers la solution P du problème (3.3.1) quand $n \to \infty$.

L'existence de solution faible pour des équations elliptiques avec données mesures est maintenant bien connue. Il existe deux méthodes, l'une introduite par G. Stampacchia dans [56], qui utilise un argument de dualité (cette méthode est donc limitée au cas linéaire), et l'autre a été introduite par L. Boccardo et T. Gallouët dans [14]. L'idée de cette deuxième technique est de considérer un problème régularisé et de passer à la limite sur ce problème grâce à des estimations assez fines sur la solution régularisée. L'avantage de cette méthode est qu'elle est encore applicable aux cas non linéaires ; malheureusement on perd l'unicité de la solution (voir [52] et [48]). Pour espérer obtenir l'unicité de la solution, on est alors obligé de rajouter des conditions supplémentaires.

Nous présentons ici deux versions de l'homogénéisation pour le problème (3.3.1). La première reprend la formulation par approximation de l'article [14], l'autre utilise la solution par dualité introduite par Stampacchia. On peut également citer les travaux récent de L. Boccardo sur l'homogénésation dans le cas où les termes sources sont L^1 en utilisant la notion de solutions renormalisées (références manquantes).

3.3.1 Solution par approximation

On considère tout d'abord la solution obtenue par approximation pour résoudre le problème (3.3.1). On rajoute la condition suivante sur la mesure μ :

$$\mu \in (W^{1,p}(\Omega))', \quad \forall p > 2. \tag{3.3.5}$$

Grâce à l'extension du résultat de Meyers (voir [42]) aux conditions limites de Neumann faite dans le premier chapitre, la condition (3.3.5) permet de démontrer l'unicité de la solution de (3.3.1) pour la formulation choisie. Cette hypothèse est également très utile pour la démonstration de la Proposition 3.3.2 qui suit.

Proposition 3.3.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne. On suppose (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.4). On suppose de plus $\mu \in (W^{1,p})'$ pour tout $p > 2$, alors il existe une unique solution P de (3.3.1) au sens suivant*

$$\begin{cases} P \in W^{1,q}, \ \forall q \in [1,2)\,, \displaystyle\int_\Omega P(x)dx = 0, \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla P(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_\Omega \varphi(x)d\mu, \quad \forall \varphi \in \bigcup_{p>2} W^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Pour la démonstration de cette proposition, se reporter à l'article [31] et au chapitre 2.

Proposition 3.3.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne. On suppose (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) et (3.3.5). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $M(\alpha,\beta,\Omega)$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $(L^2(\Omega))^N$. Soit $A \in M(\alpha,\beta,\Omega)$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On suppose que*
– $A_n \overset{H}{\rightharpoonup} A$ quand $n \to \infty$,
– $F_n \to F$ dans $(L^2(\Omega))^N$ quand $n \to \infty$.
Alors la solution P_n du problème (3.3.6), avec A_n et F_n à la place de A et F, converge dans $W^{1,q}(\Omega)$ faible, pour tout $q < 2$, vers P la solution du problème (3.3.6).

Démonstration. Soit $p > 2$ et $q = p/p-1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique solution P_n problème (3.3.6), avec A_n et F_n à la place de A et F. On voit facilement que cette solution est bornée dans $W^{1,q}(\Omega)$ indépendemment de n. On peut donc supposer, à une sous-suite près, encore notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'il existe P dans $W^{1,q}(\Omega)$ tel que $P_n \rightharpoonup P$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ faible quand $n \to \infty$, et $P_n \to P$ dans $L^q(\Omega)$ quand $n \to \infty$.
De même, la suite $(A_n(\nabla P_n - F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^q(\Omega))^N$. On peut donc également supposer, toujours à une sous-suite près, encore notée $(A_n(\nabla P_n - F_n))_{n\in\mathbb{N}}$, que cette suite converge vers un certain σ dans $(L^q(\Omega))^N$ faible. On remarque au passage que, pour tout $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \sigma(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)d\mu(x).$$

Ainsi on a
– $A_n \overset{H}{\rightharpoonup} A$ quand $n \to \infty$,
– $F_n \to F$ dans $(L^2(\Omega))^N$ quand $n \to \infty$.
– $P_n \rightharpoonup P$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ faible quand $n \to \infty$.
– $P_n \to P$ dans $L^q(\Omega)$ fort quand $n \to \infty$.
– $A_n(\nabla P_n - F_n) \rightharpoonup \sigma$ dans $(L^q(\Omega))^N$ faible quand $n \to \infty$.

Il suffit donc de démontrer que $\sigma = A(\nabla P - F)$.

Soit i un entier, $1 \leq i \leq N$. Soit ω un ouvert de Ω tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi(x) = 1$ sur ω. Soit v_n la solution du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega {}^tA_n(x)\nabla v_n(x).\nabla w(x)dx = \int_\Omega {}^tA(x)\nabla\psi_i(x).\nabla w(x)dx, \quad w \in H_0^1(\Omega), \\ v_n \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.3.7}$$

où $\psi_i(x) = x_i\varphi(x)$, pour tout $x \in \Omega$ (on a $x = {}^t(x_1, ..., x_N)$).

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-converge vers A. On a donc aussi la suite $({}^tA_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui H-converge vers ${}^tA$ (voir [45]). Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers l'unique solution v du problème suivant

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega {}^tA(x)\nabla v(x).\nabla w(x)dx = \int_\Omega {}^tA(x)\nabla\psi_i(x).\nabla w(x)dx, \quad w \in H_0^1(\Omega), \\ v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

On a donc $v = \psi_i$. On peut également supposer, quitte à considérer une nouvelle extraction, que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ψ_i dans $L^2(\Omega)$.

L'application Ψ de $H^{-1}(\omega)$ définie par

$$w \to \int_\Omega {}^tA(x)\nabla\psi_i(x).\nabla w(x)dx$$

est en fait plus régulière. On a $\Psi \in W^{-1,r}(\Omega)$, pour tout $r \geq 2$. On peut donc appliquer le théorème de régularité de Meyers : il existe $p_0 > 2$, ne dépendant que de α, β et Ω tel que $v_n \in W^{1,r}(\Omega)$ pour tout $2 < r < p_0$. On choisit donc q tel que $p < p_0$. Ainsi on peut prendre v_n comme fonction test dans l'équation (3.3.6).

On calcule la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ de l'expression ${}^tA_n\nabla v_n.(\nabla P_n - F_n) = A_n(\nabla P_n - F_n).\nabla v_n$, de deux manières différentes. Soit $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega {}^tA_n(x)\nabla v_n(x).(\nabla P_n(x) - F_n(x))\theta(x)dx \\ &= \int_\Omega {}^tA_n\nabla v_n.\nabla(P_n\theta)dx - \int_\Omega P_n{}^tA_n\nabla v_n.\nabla\theta dx - \int_\Omega \theta{}^tA_n\nabla v_n.F_n dx \\ &= \int_\Omega {}^tA\nabla\psi_i.\nabla(P_n\theta) - \int_\Omega P_n{}^tA_n\nabla v_n.\nabla\theta dx - \int_\Omega \theta{}^tA_n\nabla v_n.F_n dx. \end{aligned}$$

On peut passer à la limite pour chacun des termes de la dernière expression :

- $\displaystyle\int_\Omega {}^tA\nabla\psi_i.\nabla(P_n\theta)dx \to \int_\Omega {}^tA\nabla\psi_i.\nabla(P\theta)dx$ quand $n \to \infty$,
- $\displaystyle\int_\Omega P_n{}^tA_n\nabla v_n.\nabla\theta dx \to \int_\Omega P{}^tA\nabla\psi_i.\nabla\theta dx$ quand $n \to \infty$,
- $\displaystyle\int_\Omega \theta{}^tA_n\nabla v_n.F_n dx \to \int_\Omega \theta{}^tA\nabla v.F dx$ quand $n \to \infty$.

Finalement, on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega {}^tA_n(x)\nabla v_n(x).(\nabla P_n(x) - F_n(x))\theta(x)dx \\ &\qquad \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega {}^tA(x)\nabla\psi_i(x).(\nabla P(x) - F(x))\theta(x)dx. \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à l'expression suivante

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A_n(x)(\nabla P_n(x) - F_n(x)).\nabla v_n(x)\theta(x)dx \\
&= \int_\Omega A_n(\nabla P_n - F_n).\nabla(v_n\theta)dx - \int_\Omega v_n A_n(\nabla P_n - F_n).\nabla\theta dx \\
&= \int_\Omega v_n\theta d\mu(x) - \int_\Omega v_n A_n(\nabla P_n - F_n).\nabla\theta dx \\
&= \int_\Omega \sigma.\nabla(v_n\theta)dx - \int_\Omega v_n A_n(\nabla P_n - F_n).\nabla\theta dx.
\end{aligned}$$

On peut passer à la limite pour chacun des termes de la dernière expression

- $\displaystyle\int_\Omega \sigma(x).\nabla(v_n(x)\theta(x))dx \to \int_\Omega \sigma(x).\nabla(\psi_i(x)\theta(x))dx$ quand $n \to \infty$,
- $\displaystyle\int_\Omega v_n(x)A_n(x)(\nabla v_n(x).\nabla\theta(x))dx \to \int_\Omega v(x)\sigma(x).\nabla\theta(x)dx$ quand $n \to \infty$.

On a donc cette fois

$$\int_\Omega A_n(x)(\nabla P_n(x) - F_n(x)).\nabla v_n(x)\theta(x)dx \to \int_\Omega \sigma(x).\nabla\psi_i(x)\theta(x)dx,$$

quand $n \to \infty$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a

$$\sigma(x).\nabla\psi_i(x) = {}^tA(x)\nabla\psi_i(x).(\nabla P(x) - F(x)),$$

dans $\mathcal{D}'$ et donc pour presque tout $x \in \Omega$. Par définition de ψ_i, on a finalement que

$$\sigma_i(x) = (A(x)(\nabla P(x) - F(x)))_i,$$

presque partout sur ω. Comme ω et i sont quelconques, cela permet effectivement de conclure que

$$\sigma = A(\nabla P - F).$$

Ainsi P est l'unique solution de (3.3.6) ; on a donc toute la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers P, ce qui termine la preuve. ■

3.3.2 Solution au sens de Stampacchia

On utilise cette fois la dualité pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.3.1). Notons que cette formulation permet d'obtenir l'unicité pour toute mesure sur Ω, l'hypothèse (3.3.5) est superflue.

Dans [26], J. Droniou généralise les résultats de Stampacchia à un grand nombre de conditions limites. En particulier le résultat de régularité sur lequel s'appuie cette méthode est encore vrai pour le problème de Neumann.

Proposition 3.3.3 (Existence et unicité) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $n = 2$ ou 3, à frontière lipschitzienne. On suppose (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.4). Alors il existe* *une unique solution du problème (3.3.1) au sens suivant*

$$\begin{cases} P \in W^{1,q}(\Omega), \quad \forall q \in \left[1, \dfrac{N}{N-1}\right), \quad \displaystyle\int_\Omega P(x)dx = 0, \\ \\ -\displaystyle\int_\Omega P(x)\mathrm{div}\,({}^tA(x)\nabla\varphi(x))dx = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_\Omega \varphi(x)d\mu, \quad \forall \varphi \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \qquad\qquad\qquad -\mathrm{div}\,({}^tA\nabla\varphi) \in C_c^\infty(\Omega) \text{ et } {}^tA\nabla\varphi.\mathrm{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.8}$$

Démonstration. On note $W_*^{1,p}(\Omega)$ (respectivement $H_*^1(\Omega)$) l'ensemble des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $H^1(\Omega)$) à moyenne nulle (f est à moyenne nulle si $\int_\Omega f(x)dx = 0$). Pour p fixé, $1 < p < \infty$, on note $q = p/p-1$.

On introduit le problème dual suivant :

$$\begin{cases} u \in H_*^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega {}^tA(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \langle f, \varphi\rangle_{(H_*^1)', H_*^1}, \quad \forall \varphi \in H_*^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.3.9}$$

où f appartient à $(H_*^1(\Omega))'$. Le résultat de régularité de Stampacchia, généralisé par J. Droniou au problème de Neumann, nous dit que l'application T_p, définie pour $p \geq 2$ par $T_p(f) = u$ pour tout $f \in (W_*^{1,q}(\Omega))'$, avec u l'unique solution du problème (3.3.9), est linéaire continue de $(W_*^{1,q}(\Omega))'$ dans $C(\bar{\Omega})$ dès que $p > N$. On a donc, si $p > N$,

$$T_p \;:\; (W_*^{1,q}(\Omega))' \to C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

Ainsi l'adjoint de T_p, que l'on note T_p^*, est défini sur $(C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega))'$ à valeur dans $W_*^{1,p}(\Omega)$. En particulier, T_p^* est défini sur $\mathcal{M}(\Omega) + (H^1(\Omega))'$ par densité de $C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ dans $C(\bar{\Omega})$ et $H^1(\Omega)$. On note de la même manière T_p^* et sa restriction à $\mathcal{M}(\Omega) + (H^1(\Omega))'$.

Soit $\eta \in \mathcal{M}(\Omega) + (H^1(\Omega))'$. Par définition de l'adjoint, P est l'unique solution de

$$\begin{cases} P \in W_*^{1,q}(\Omega) \\ \langle P, f\rangle_{W_*^{1,q}, (W_*^{1,q})'} = \langle \eta, T_p(f)\rangle_{(C(\bar{\Omega})\cap H^1)', C(\bar{\Omega})\cap H^1}, \quad \forall f \in (W_*^{1,q}(\Omega))'. \end{cases}$$

P est donc aussi l'unique solution de

$$\begin{cases} P \in W_*^{1,q}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega P(x)f(x)dx = \langle \eta, T_p(f)\rangle_{(C(\bar{\Omega})\cap H^1(\Omega))', C(\bar{\Omega})\cap H^1(\Omega)}, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Si $f \in C_c^\infty(\Omega)$, on pose $\varphi = T_p(f)$. P est donc l'unique solution de

$$\begin{cases} P \in W_*^{1,q}(\Omega), \\ \\ -\displaystyle\int_\Omega P(x)\mathrm{div}\,({}^tA(x)\nabla\varphi(x))dx = \langle \eta, T_p(f)\rangle \quad \forall \varphi \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \\ \qquad\qquad\qquad \text{telle que } -\mathrm{div}\,({}^tA\nabla\varphi) \in C_c^\infty(\Omega) \text{ et } {}^tA\nabla\varphi.n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'unicité de la solution et le fait que les espaces $W^{1,q}_*(\Omega)$ sont emboités permettent de montrer finalement que P ne dépend pas de $q < N/N-1$. En particulier pour $\eta \in \mathcal{M}(\Omega) + (H^1(\Omega))'$ défini par

$$\langle \eta, \varphi \rangle = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega \varphi(x)d\mu,$$

avec $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$, on obtient bien la formulation (3.3.8). ∎

Remarque 3.3.1 *La linéarité de T_p^* montre que la solution P ainsi obtenue est la somme de la solution $T_p^*(\mu)$ et de la solution $T_p^*(f)$ où $f \in (H^1_*(\Omega))'$ est définie par*

$$\langle f, \varphi \rangle_{(H^1_*(\Omega))', H^1_*(\Omega)} = \int_\Omega A(x)F(x).\nabla\varphi(x)dx.$$

En particulier, comme $T_p^*(f) = T_p(f)$, on a

$$P = T_p^*(\mu) + T_p(f).$$

Pour la solution ainsi obtenue, le résultat d'homogénéisation est facile à démontrer. Il repose principalement sur un résultat de compacité des solutions du problème dual et la remarque précédente.

Proposition 3.3.4 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne. On suppose (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.4). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $M(\alpha,\beta,\Omega)$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $(L^2(\Omega))^N$. Soit $A \in M(\alpha,\beta,\Omega)$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On suppose que*
– *$A_n \xrightarrow{H} A$ quand $n \to \infty$,*
– *$F_n \to F$ dans $(L^2(\Omega))^N$ quand $n \to \infty$.*
Alors la solution P_n du problème (3.3.8), avec A_n et F_n à la place de A et F, converge dans $W^{1,q}(\Omega)$ faible, pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1})$, vers P la solution du problème (3.3.8).

Démonstration Soit P_n la solution du problème (3.3.8), avec A_n et F_n à la place de A et F. D'après la remarque 3.3.1, P_n peut être considérée comme la somme de deux solutions : $P_n' = (T_p^n)^*(\mu)$ et $P_n'' = T_p^n(f_n)$ où T_p^n désigne l'opérateur T_p avec A_n à la place de A et f_n est définie comme dans la remarque 3.3.1 avec A_n et F_n à la place de A et F.

L'étude du terme P_n'' ne pose pas de problème. En effet P_n'' est la solution de

$$\begin{cases} P_n'' \in H^1_*(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega A_n(x)(\nabla P_n''(x) - F_n(x)).\nabla\varphi(x)dx = 0, \quad \forall\varphi \in H^1_*(\Omega). \end{cases}$$

Ainsi, d'après la Proposition 3.3.2 (en fait le problème est ici plus simple...), la suite $(P_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $H^1_*(\Omega)$-faible vers P'' la solution de

$$\begin{cases} P'' \in H^1_*(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)(\nabla P''(x) - F(x)).\nabla\varphi(x)dx = 0, \quad \forall\varphi \in H^1_*(\Omega). \end{cases}$$

En particulier, $(P''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $W^{1,q}_*(\Omega)$-faible, pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1})$.

Il nous reste donc à étudier la suite $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p, $N < p < \infty$, et $q = p/p-1$. Comme dans la démonstration de la Proposition 3.3.3, on peut considérer que P'_n est l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_n \in W^{1,q}_*(\Omega) \\ \langle P'_n, \psi\rangle_{W^{1,q}_*,(W^{1,q}_*)'} = \langle \mu, T^n_p(\psi)\rangle_{(C(\bar\Omega)\cap H^1)',C(\bar\Omega)\cap H^1}, \quad \forall \psi \in (W^{1,q}_*(\Omega))'. \end{array} \right. \tag{3.3.10}$$

Il convient de préciser le théorème de régularité de Stampacchia généralisé par J. Droniou : il existe $\kappa \in (0, 1-N/p]$ dépendant seulement de α, β, N et p tel que la solution $T^n_p(\psi)$ est κ-hölderienne sur Ω. De plus, il existe $C > 0$ dépendant seulement de Ω, α, β, p et $\|\psi\|_{(W^{1,q}_*(\Omega))'}$, et donc pas de n, tel que

$$\|T^n_p(\psi)\|_{C^{0,\kappa}(\Omega)} \le C. \tag{3.3.11}$$

Cette inégalité et l'équation (3.3.10) montrent deux choses : la suite $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,q}_*(\Omega)$ et la suite $(T^n_p(\psi))_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $C(\bar\Omega)$. Ainsi il existe P' et Ψ telles que l'on peut extraire des sous-suites de $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T^n_p(\psi))_{n\in\mathbb{N}}$, toujours notées pareilles, qui convergent vers P' et Ψ respectivement dans $W^{1,q}_*(\Omega)$ faible et $C(\bar\Omega)$.

Les résultats classiques sur la H-convergence montrent immédiatement que $\Psi = T_p(\psi)$. On passe alors à la limite dans l'équation (3.3.10), on a donc que $P' = T^*_p(\mu)$. L'unicité de la limite permet de récupérer la convergence pour toute la suite.

Finalement, on a bien $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers P dans $W^{1,q}_*(\Omega)$-faible, pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1})$, où P est la solution du problème (3.3.8). ∎

Remarque 3.3.2 *Cette méthode montre bien l'efficacité de la dualité. On utilise en fait la H-convergence juste pour le problème dual qui est très régulier. Bien-sûr cela se fait au détriment d'une formulation plus "abstraite ".*

3.4 Homogénéisation pour les écoulements en milieu poreux

Cette partie est consacrée à l'étude du comportement des solutions (u, p_1) du système (2.1.2), introduit au chapitre 2, quand le tenseur de perméabilité K dépend d'un petit paramètre ε. S'il est facile de montrer que la suite des solutions $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une valeur d'adhérence (u, P), il reste à savoir si ce couple (u, P) est lui-même solution du système (2.1.2) pour un certain K.

L'étude montre que la H-limite convient quand on étudie le système (2.1.2) dans le cadre d'un écoulement immiscible (c'est-à-dire le système (2.1.4)) mais que si l'on considère un écoulement miscible, le système (2.1.6), en tenant compte du terme correctif de gravité $-\mathrm{div}\,(h(u)KG)$ alors le problème limite n'est plus exactement du même type, deux tenseurs interviennent, la H-limite et aussi la limite L^∞-faible* de la suite $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

On rappelle les hypothèses (H) sur les différentes données du problème introduites dans le chapitre 2 (pour lesquelles nous avons démontrer l'existence de solution faible pour les systèmes (2.1.4) et (2.1.6)).

$$\begin{gathered} T \in \mathbb{R}_*^+ \text{ et } \Omega \text{ un ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ N = 2 \text{ ou } 3, \\ \text{à frontière lipschitzienne.} \end{gathered} \tag{3.4.1}$$

$$u_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ et } 0 \leq u_0(x) \leq 1 \quad \text{p.p.} x \in \Omega. \tag{3.4.2}$$

La fonction G qui représente la gravité vérifie

$$G \in C_b^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N). \tag{3.4.3}$$

Les fonctions f, g et m vérifient les trois propriétés suivantes :

$$\begin{gathered} f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ est une fonction lipschitzienne vérifiant} \\ f(s) = 0 \quad \text{si} \quad s \leq 0, \\ f(s) = 1 \quad \text{si} \quad s \geq 1. \end{gathered} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{gathered} g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ est une fonction lipschitzienne vérifiant} \\ g(s) = 1 \quad \text{si} \quad s \leq 0, \\ g(s) = 0 \quad \text{si} \quad s \geq 1. \end{gathered} \tag{3.4.5}$$

$$\text{Il existe } \bar{m} > 0 \text{ tel que }, \forall s \in \mathbb{R},\ m(s) > \bar{m} \tag{3.4.6}$$

K, la matrice de perméabilité, et D, la matrice de diffusion-dispersion, vérifient la condition d'ellipticité suivante

$$\text{Il existe } \alpha, \beta > 0 \ \text{ tels que } K \text{ et } \mathrm{D} \in M(\alpha, \beta, \Omega) \tag{3.4.7}$$

où $M(\alpha, \beta, \Omega)$ est défini par

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta, \Omega) = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N} \mid \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \alpha |\xi|^2 \leq A(x)\xi.\xi \ \text{ p.p. } x \in \Omega, \text{ and } \|A\|_\infty \leq \beta\}. \end{aligned}$$

$$\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega) \tag{3.4.8}$$

et

$$\begin{gathered} a,\ b \text{ et } c \in L^\infty((0,T); C(\bar{\Omega})) \\ 0 \leq a(x,t), \quad 0 \leq b(x,t) \quad \text{et} \quad 0 \leq c(x,t) \leq 1, \\ \text{p.p. } t \in (0,T),\ \forall x \in \Omega. \end{gathered} \tag{3.4.9}$$

La condition limite (2.1.8) impose également la condition de compatibilité suivante

$$\int_\Omega a(x,t) d\mu = \int_\Omega b(x,t) d\mu. \tag{3.4.10}$$

Enfin, on suppose que la mesure μ vérifie

$$\mu \in (W^{1,q}(\Omega))', \quad \forall q > 2. \tag{3.4.11}$$

Cette hypothèse supplémentaire n'est nécessaire quand dimension 3. Enfin, pour les écoulements immiscibles, on rajoute l'hypothèse suivante :

$$\varphi \text{ bijective et } \exists \rho \in]0,1[\text{ tel que } \varphi^{-1} \text{ est } \rho-\text{höldérienne.} \tag{3.4.12}$$

3.4.1 Homogénéisation pour des écoulements miscibles

On considère un système légèrement différent du système (2.1.6) :

$$u_t + (f(u)\mathrm{v}_T) - \mathrm{div}\,(h(u)KG) - \mathrm{div}\,(\mathrm{D}\nabla u) = ca\mu - ub\mu, \tag{3.4.13}$$
$$\mathrm{v}_T + m(u)K\,(\nabla P - F(x,u)) = 0, \tag{3.4.14}$$
$$\mathrm{div}\ (\mathrm{v}_T) = a\mu - b\mu, \tag{3.4.15}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.4.16}$$
$$(\mathrm{D}(x)\nabla u(x,t) + h(u(x,t))K(x)G(x)).\mathrm{n}(x) = 0, \tag{3.4.17}$$
$$\text{et}\ \ \mathrm{v}_T(x,t).\mathrm{n}(x) = 0, \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{3.4.18}$$

Ce modèle tient compte de la différence entre les deux densités. Sous les hypothèses (H), il est possible de démontrer l'existence d'une solution faible à ce problème (démonstration plus ou moins faite dans le chapitre 2).

Théorème 6 (Ecoulement Miscible) *On suppose (3.4.1)-(3.4.11). Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $M(\alpha,\beta,\Omega)$. Alors il existe un élément K de $M(\alpha,\beta^2/\alpha,\Omega)$ et $\tilde{K}$ de $M(\alpha,\beta,\Omega)$ tels que, à une sous-suite près,*
- $K_n \overset{H}{\rightharpoonup} K$ *quand* $n \to \infty$,
- $K_n \rightharpoonup \tilde{K}$ *dans* $(L^\infty(\Omega))^{N\times N}$*-faible* quand* $n \to \infty$.

De plus, de toute suite de solution faible (u_n, P_n) du problème (3.4.13)-(3.4.18) au sens de la Définition 2.2.1, avec K_n à la place de K, on peut extraire une sous-suite qui converge vers une couple (u,P) solution faible du nouveau problème

$$\begin{gathered}
u_t + \mathrm{div}\,(f(u)\mathrm{v}_T) - \mathrm{div}\,(h(u)\tilde{K}G) - \mathrm{div}\,(D\nabla u) = ca\mu - ub\mu,\\
\mathrm{v}_T + g(u)K(\nabla P - F(x,u)) = 0,\\
\mathrm{div}\,(\mathrm{v}_T) = a\mu - b\mu,\\
u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,\\
(D(x)\nabla u(x,t) + h(u(x,t))\tilde{K}(x)G(x)).n(x) = 0,\\
et\ \ \mathrm{v}_T(x,t).n(x) = 0, \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T).
\end{gathered}$$

Remarque 3.4.1 *Le problème obtenu par passage à la limite n'est donc pas du même type. Il existe deux matrices limites dans le nouveau problème, la H-limite et la limite L^∞-faible*. Noter que le terme qui fait apparaître $\tilde{K}$, $-\mathrm{div}\,(h(u)\tilde{K}G)$, est en générale négligé pour un modèle entièrement miscible. En effet, il faut alors considérer que les fluides ont la même densité $\rho = \rho_1 = \rho_2$, c'est-à-dire $h = 0$.*

Preuve. La démonstration se déroule en 3 étapes : des estimations convenables permettent d'obtenir de la compacité sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on utilise ensuite la Proposition 3.3.2 pour passer à la limite dans l'équation en pression. Enfin, on passe à la limite dans la loi de conservation.

Avant de commencer, on rappelle que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant incluse dans $M(\alpha,\beta,\Omega)$, l'existence de K et $\tilde{K}$ est un résultat de compacité de l'ensemble $M(\alpha,\beta,\Omega)$ pour les convergences considérées.

Etape 1. Les estimations sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ découlent directement du Théorème 1 (voir [31], et le chapitre 2 pour plus de détails). On rappelle les résultats : la suite

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0,T);H^1(\Omega))$ et la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0,T);(W^{1,p})')$, pour tout $p > N$. Grâce à un résultat classique de compacité (voir [40] et [54]), la suite est relativement compacte dans $L^2((0,T);L^2(\Omega))$ et dans $C([0,T];(W^{1,p})')$, pour tout $p > N$. On peut donc suppposer, à une sous-suite près, que
– $u_n(.,t) \to u(.,t)$ in $(W^{1,p})'$, pour tout $p > N$, uniformément sur $t \in [0,T]$,
– $u_n \to u$ faiblement dans $L^2((0,T);H^1(\Omega))$,
– $(u_n)_t \to u_t$ faiblement dans $L^2((0,T);(W^{1,p}(\Omega))')$, pour tout $p > N$,

quand $n \to \infty$. Ainsi, $u \in C([0,T];(W^{1,p})')$ pour tout $p > N$, $u \in L^2((0,T);H^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2((0,T);(W^{1,p})')$, pour tout $p > N$.

De plus, comme $L^2((0,T);L^2(\Omega))$ peut être identifié à $L^2(\Omega \times (0,T))$, on peut également supposer (à une sous-suite près, comme toujours) que $u_n \to u$ presque partout sur $\Omega\times(0,T)$ (ce qui est équivalent aussi à $u_n(.,t) \to u(.,t)$ presque partout sur Ω pour presque tout $t \in (0,T)$). En particulier, pour toute fonction lischitzienne φ, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(u)$ dans $L^2(\Omega \times (0,T))$.

Etape 2. D'après l'étape 1, la suite $(F(.,u_n(.,t)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(L^2(\Omega))^N$ vers $F(.,u(.,t))$ pour presque tout $t \in (0,T)$ et la suite $(m(u_n(.,t))K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-converge vers $m(u(.,t))K$ pour presque tout $t \in (0,T)$.

On peut donc appliquer la Proposition 3.3.2. Ainsi, il existe P et v_T tels que la suite $(P_n(.,t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $W^{1,q}(\Omega)$-faible, pour tout $q < 2$, vers $P(.,t)$, pour presque tout $t \in (0,T)$, et la suite $((\mathrm{v}_T)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(L^q(\Omega))^N$-faible, pour tout $q < 2$, vers v_T, pour presque tout $t \in (0,T)$, avec P et v_T les solutions du problème suivant

$$P \in L^\infty((0,T);W^{1,q}(\Omega)),\ \forall q \in [1,2),\ \int_\Omega P(x)dx = 0,$$

$$\mathrm{v}_T(x,t) = -m(u(x,t))K(x)(\nabla P(x,t) - F(x,t,u(x,t))),\ \text{p.p. } (x,t) \in \Omega\times(0,T),$$

$$-\int_\Omega \mathrm{v}_T(x,t).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)a(x,t)d\mu - \int_\Omega \varphi(x)b(x,t)d\mu,$$

$$\forall\varphi \in \bigcup_{r>2} W^{1,r}(\Omega),\ \text{p.p. sur } (0,T).$$

Etape 3. Finalement, on passe à la limite dans l'équation parabolique. Soit $\varphi \in \bigcup_{r>2} W^{1,r}(\Omega)$. On a, quand $n \to \infty$,
– $\langle (u_n)_t(.,t),\varphi\rangle_{(W^{1,r})',W^{1,r}} \to \langle u_t(.,t),\varphi\rangle_{(W^{1,r})',W^{1,r}}$,
– $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{D}(x)\nabla u_n(x,t).\nabla\varphi(x)dx \to \int_\Omega \mathrm{D}(x)\nabla u(x,t).\nabla\varphi(x)dx$,
– $\displaystyle\int_\Omega f(u_n(x,t))(\mathrm{v}_T)_n(x,t).\nabla\varphi(x)dx \to \int_\Omega f(u(x,t))\mathrm{v}_T(x,t).\nabla\varphi(x)dx$,
– $\displaystyle\int_\Omega u_n(x,t)\varphi(x)b(x,t)d\mu \to \int_\Omega u(x,t)\varphi(x)b(x,t)d\mu$.

Il reste à étudier le comportement du terme $\int_\Omega h(u_n(x,t)).\nabla\varphi(x)dx$. On rappelle que h est défnie par

$$h(s) = (\rho_1 - \rho_2)f(s)g(s)m(s).$$

Ainsi $(h(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $h(u)$ dans $L^1(\Omega\times(0,T))$. Pour finir, on a

$$\int_\Omega h(u_n(x,t))K_n(x)G(x).\nabla\varphi(x)dx \to \int_\Omega h(u(x,t))\tilde{K}(x)G(x).\nabla\varphi(x)dx,$$

quand $n\to\infty$, où $\tilde{K}$ est la limite L^∞-faible* de la suite des K_n, ce qui termine la preuve. ■

3.4.2 Homogénéisation pour des écoulements immiscibles

On rappelle le système (2.1.4) :

$$u_t + (f(u)\mathrm{v}_T) - \mathrm{div}\,(h(u)KG) - \mathrm{div}\,(K\nabla\varphi(u)) = ca\mu - ub\mu, \tag{3.4.19}$$

$$\mathrm{v}_T + m(u)K\,(\nabla P - F(x,u)) = 0, \tag{3.4.20}$$

$$\mathrm{div}\;(\mathrm{v}_T) = a\mu - b\mu, \tag{3.4.21}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x\in\Omega, \tag{3.4.22}$$

$$(\nabla\varphi(u(x,t)) + h(u(x,t))K(x)G(x)).\mathrm{n}(x) = 0, \tag{3.4.23}$$

$$\text{et}\;\; \mathrm{v}_T(x,t).\mathrm{n}(x) = 0, \quad \forall(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T). \tag{3.4.24}$$

Théorème 7 (Ecoulement immiscible) *On suppose que l'on a les hypothèses (3.4.1)-(3.4.11). Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments symétriques de $M(\alpha,\beta,\Omega)$. Alors il existe K symétrique, appartenant à $M(\alpha,\beta,\Omega)$ tel que, à une sous-suite près,*

$$K_n \xrightarrow{H} K \text{ quand } n\to\infty$$

Alors, de toute suite de solution faible (u_n,P_n) du problème (3.4.19)-(3.4.24) au sens de la Définition 2.2.3, avec K_n à la place de K, on peut extraire une suite qui converge vers un couple (u,P), solution du problème (3.4.19)-(3.4.24), au sens de la Définition 2.2.3.

Preuve. La démonstration se déroule également en 3 étapes, qui sont rigoureusement les mêmes que pour la démonstration précédente. La seule différence apparait dans la troisième étape, où pour passer à la limite dans l'équation parabolique dégénérée, on refait le travail d'homogénéisation fait dans la Partie 3.2, à savoir l'identification de la limite de l'expression $K_n(\nabla\varphi(u_n)+h(u_n)G-f(u_n)m(u_n)(\nabla P_n - F(.,u_n)))$.

Etape 1. Comme pour la démonstration du théorème précédent, les estimations sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n(\nabla\varphi(u_n) + h(u_n)G - f(u_n)m(u_n)(\nabla P_n - F(.,u_n))))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des conséquences du théorème d'existence et des résultats intermédiaires du Chapitre 2.

Le résultat le plus dur à obtenir est la convergence presque partout de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On utilise le même argument que dans le chapitre 2, à savoir que l'hypothèse (3.4.12) : $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0,T);H^1(\Omega))$. Grâce à l'hypothèse (3.4.12), la réciproque de φ, φ^{-1}, est ρ-höldérienne, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{2/\rho}((0,T);W^{\theta\rho,2/\rho}(\Omega))$ pour tout θ, $0<\theta<1$ (voir [53]). Ainsi il existe $u\in L^{2/\rho}((0,T);W^{\theta\rho,2/\rho}(\Omega))$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u faiblement, à une sous-suite près. Comme la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0,T);((W^{1,p})'(\Omega))$, pour tout $p>2$, on en déduit qu'il existe un certain $r<2$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $L^r((0,T)\times\Omega)$. On peut donc supposer, après une nouvelle extraction, que cette suite converge presque partout vers u. C'est le résultat qui nous interesse.

De plus φ est bijective, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty((0,T)\times\Omega)$. On en déduit donc que $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(u)$ dans $L^2((0,T)\times\Omega)$, et faiblement dans $L^2((0,T),W^{1,q}(\Omega))$, $q<2$.

De plus, la suite $(K_n(\nabla\varphi(u_n)+h(u_n)G-f(u_n)m(u_n)(\nabla P_n-F(.,u_n))))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0,T);(L^q)^N)$, pour tout $q<2$. On peut donc supposer après une nouvelle extraction que cette suite converge faiblement vers un certain σ dans $L^2((0,T);(L^q)^N)$, pour tout $q<2$.

Etape 2. D'après l'étape 1, on a finalement exactement les mêmes résultats que dans le cadre d'un écoulement miscible. La suite $(F(.,u_n(.,t)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(L^2(\Omega))^N$ vers $F(.,u(.,t))$ pour presque tout $t\in(0,T)$ et la suite $(m(u_n(.,t))K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-converge vers $m(u(.,t))K$ pour presque tout $t\in(0,T)$. On peut donc appliquer une nouvelle fois la Proposition 3.3.2 pour passer à la limite dans l'équation de la pression.

Ainsi, il existe P et v_T tels que la suite $(P_n(.,t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $W^{1,q}(\Omega)$-faible, pour tout $q<2$, vers $P(.,t)$, pour presque tout $t\in(0,T)$, et la suite $((\mathrm{v}_T)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(L^q(\Omega))^N$-faible, pour tout $q<2$, vers v_T, pour presque tout $t\in(0,T)$, avec P et v_T les solutions du problème suivant

$$P\in L^\infty((0,T);W^{1,q}(\Omega)),\ \forall q\in[1,2),\ \int_\Omega P(x)dx=0,$$

$$\mathrm{v}_T(x,t)=-m(u(x,t))K(x)(\nabla P(x,t)-F(x,t,u(x,t))),\ \text{p.p. } (x,t)\in\Omega\times(0,T),$$

$$-\int_\Omega \mathrm{v}_T(x,t).\nabla\varphi(x)dx=\int_\Omega\varphi(x)a(x,t)d\mu-\int_\Omega\varphi(x)b(x,t)d\mu,$$

$$\forall\varphi\in\bigcup_{r>2}W^{1,r}(\Omega),\ \text{p.p. sur } (0,T).$$

Etape 3. Pour passer à la limite dans l'équation parabolique dégénérée, on refait exactement le travail de la Partie 3.2, c'est-à-dire qu'il faut une nouvelle fois identifier la limite σ de la suite $(K_n(\nabla\varphi(u_n)+h(u_n)G-f(u_n)m(u_n)(\nabla P_n-F(.,u_n))))_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère donc le problème associé habituel, et on calcul de deux manières différentes la limite d'une certaine expression. Une nouvelle fois, toutes les estimations et les convergences établies dans les étapes précédentes permettent de conclure assez facilement.

La seule subtilité consiste donc à considérer vraiment toute l'expression

$$K_n(\nabla\varphi(u_n) + h(u_n)G - f(u_n)m(u_n)(\nabla P_n - F(.,u_n)))$$

et pas seulement $K_n\nabla\varphi(u_n)$. Le reste de cette démonstration se déroule comme la Partie 3.2, en rajoutant l'utilisation du théorème de régularité de Meyers comme pour la démonstration de la Proposition 3.3.2. ■

Chapitre 4

Résolution du problèmes de Stokes avec second membre mesure

Introduction

Le but de ce travail était de résoudre le problème de Navier-Stokes avec second membre mesure. Ce problème peut être intéressant par exemple pour déterminer un état initial en météorologie. En effet, on ne sait déterminer la trajectoire du modèle de prévision que dans un cadre assez régulier : en particulier on suppose les observations continues en espace, ce qui n'est pas très réaliste ! Les systèmes d'équations aux dérivées partielles considérés sont assez proches du système de Navier-Stokes.

La nature vectorielle et la non-linéarité du système de Navier-Stokes compliquent considérablement l'utilisation des méthodes pour résoudre une équation avec second membre mesure. Ces techniques présentées dans l'Annexe A sont effectivement soit limitées au cadre linéaire (Stampacchia), soit utilisent très fortement les troncatures. Cet outil très efficace pour obtenir des estimations sur une solution d'un problème approché est inutilisable dans le cadre vectoriel. La condition d'incompressibilité par exemple est impossible à respecter pour une troncature au sens strict.

Une première étape pour comprendre ce que l'on peut espérer obtenir comme résultat sur le problème de Navier-Stokes consiste à étudier le problème de Stokes. En effet, ce système très largement étudié présente l'avantage d'être linéaire et en plus il existe déjà des résultats de régularité de la solution. Nous donnons donc une formulation pour le système de Stokes qui permet d'obtenir l'existence et l'unicité d'une solution trés faible au problème avec second membre mesure.

Nous n'avons malheureusement que peu de résultat sur le problème de Navier-Stokes, mais ce travail suit son cours...

4.1 Stokes, existence et régularité

On s'intéresse au système de Stokes stationnaire sur un domaine Ω régulier (la régularité du domaine sera précisé en temps utile).

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla P = f \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

On rappelle que cette notation est abusive et désigne en fait le système suivant :

$$-\Delta u_i + D_i P = f_i \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } i = 1...N.$$

L'existence et la régularité à ce problème ont déjà été démontrées. Le problème n'est pourtant pas si clair ; en particulier l'écriture des formulations faibles des équations, en dehors du cadre variationnel classique, est le plus souvent inexistante, ce qui pose évidemment certains inconvénients. En effet, nous présentons dans l'Annexe A les deux méthodes concernant la résolution d'équations aux dérivées partielles avec second membre mesure : si les solutions vivent dans le même espace, la formulation par dualité permet d'obtenir l'unicité de la solution tandis qu'il existe un contre-exemple à l'unicité pour la deuxième formulation. On ne peut donc pas se contenter de rester dans le flou sur la formulation choisie.

Ces réserves concernent principalement le Théorème d'Agmon-Douglis-Niremberg, appelé plus simplement ADN (voir [2] et [3], et [59] pour l'application au problème de Stokes). Ce théorème doit être vu, à mon avis, comme un théorème de régularité uniquement.

4.1.1 Solution variationnelle

Théorème 8 (Existence) *Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout f appartenant à $(L^2(\Omega))^N$ (et même $(H^{-1}(\Omega))^N$), il existe une unique solution faible (u, P) (P est unique à une constante près) au problème (4.1.1) au sens suivant :*

$$u \in V = \{v \in (H_0^1(\Omega))^N \textit{ tel que } \operatorname{div}(v) = 0\}, \tag{4.1.2}$$

$$P \in L^2(\Omega), \tag{4.1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla v_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i(x) v_i(x)\, dx \quad \forall v \in V, \tag{4.1.4}$$

$$-\Delta u + \nabla P = f \textit{ au sens des distributions dans } \Omega. \tag{4.1.5}$$

L'ensemble V étant un sous-espace fermé de $H_0^1(\Omega)$, l'existence et l'unicité de u sont des conséquences immédiates du Théorème de Lax-Milgram. L'existence de P est beaucoup plus dur à obtenir, il s'agit du théorème de De Rham (voir [50] et, pour la démonstration [46]) :

Théorème 9 (De Rham) *Si f appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie*

$$\langle f, v\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V} = \{w \in \mathcal{D}(\Omega) \textit{ tel que } \operatorname{div}(w) = 0\},$$

alors il existe $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $f = \nabla p$.

Il est également possible de démontrer l'existence au problème de Stokes non homogène, c'est-à-dire, pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$, $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, il existe une solution variationnelle au problème

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla P = f \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = g \text{ dans } \Omega, \\ u = \phi \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1.6}$$

sous la condition de compatibilité suivante

$$\int_\Omega g(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \phi.\mathrm{n}\, d\sigma, \tag{4.1.7}$$

où n désigne la normale sortante au bord de Ω.

4.1.2 La régularité

D'après la forme du système de Stokes, on est en droit d'attendre un résultat de régularité analogue à celui du Laplacien. C'est effectivement le cas :

Proposition 4.1.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de classe $\mathcal{C}^{m+2}$, m étant un entier strictement positif. On suppose qu'il existe u et P,*

$$u \in (W^{1,\alpha}(\Omega))^N, \quad P \in L^\alpha(\Omega),$$

pour $1 < \alpha < +\infty$, solutions du problème de Stokes non homogène (4.1.6). Alors si $f \in (W^{m,\alpha}(\Omega))^N$, $g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$ et $\phi \in W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\partial\Omega)$, on a

$$u \in (W^{m+2,\alpha}(\Omega))^N, \quad P \in W^{m+1,\alpha}(\Omega). \tag{4.1.8}$$

De plus il existe une constante $C_0(\alpha, m, \Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} &\|u\|_{W^{m+2,\alpha}} + \|P\|_{W^{m+1,\alpha}/\mathbb{R}} \\ &\qquad \leq C_0 \left(\|f\|_{(W^{m,\alpha})^N} + \|g\|_{W^{m+1,\alpha}} + \|\phi\|_{W^{m+2-1/\alpha,\alpha}} + d_\alpha \|u\|_{L^\alpha} \right), \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

avec $d_\alpha = 0$ si $\alpha \geq 2$, et $d_\alpha = 1$ pour $1 < \alpha < 2$.

La démonstration de ce résultat consiste à se ramener au théorème général de régularité des systèmes elliptiques à coefficient régulier, c'est-à-dire le théorème ADN déjà cité. Cette démonstration se trouve dans le livre [59].

Comme nous pouvons le voir, cette proposition ne dit pas en quel sens u et P sont solutions du problème (4.1.6). Le théorème ADN utilise l'existence d'un noyau pour les problèmes elliptiques à coefficient régulier. C'est d'ailleurs ce à quoi la majeure partie de leurs articles est consacrée. Le premier article date de 1959, il ne traite que le cas des équations. Le deuxième article paraît en 1964 et étudie les systèmes.

Le résultat de régularité en dimension 3 pour le problème de Stokes est en fait antérieur au deuxième article de Agmon-Douglis-Niremberg [3]. En effet l'existence d'un noyau pour l'équation de Stokes est connue depuis longtemps (le noyau d'Odqvist [47]). Ainsi L. Cattabriga, dans [22], utilise la technique du premier article de

Agmon-Douglis-Niremberg pour démontrer un résultat d'existence et de régularite pour le problème de Stokes en dimension 3. Le résultat est même plus fort car il est également valable pour $m = -1$.

Théorème 10 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, de classe $\mathcal{C}^r$, $r = \max(m+2, 2)$, avec m un entier supérieur à -1, et soient $f \in (W^{m,\alpha}(\Omega))^N$, $g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$ et $\phi \in W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\partial\Omega)$, vérifiant la condition (4.1.7). Alors il existe une unique solution $u \in (W^{m+2,\alpha}(\Omega))^N$, et une unique solution $P \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$, à une constante près du problème (4.1.6).*
De plus il existe une constante $C_0(\alpha, m, \Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} &\|u\|_{(W^{m+2,\alpha})^N} + \|P\|_{W^{m+1,\alpha}/\mathbb{R}} \\ &\qquad \leq C_0 \left(\|f\|_{(W^{m,\alpha})^N} + \|g\|_{W^{m+1,\alpha}} + \|\phi\|_{W^{m+2-1/\alpha,\alpha}} \right). \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Pour une généralisation du résultat à toutes les dimensions, voir [59], [7] et [8].

Comme pour le Théorème ADN, ces résultats utilisent la solution obtenue par un noyau. Le seul cadre où l'existence et l'unicité donnée par ces théorèmes ne pose aucun problème de formulation (c'est-à-dire où on est sûr qu'il n'existe pas de solution très faible qui ne sont données par un noyau) est donc quand la solution coïncide avec la solution variationnelle, c'est-à-dire pour $\alpha \geq 2$.

4.2 Résolution du problème de Stokes avec second membre mesure

On se propose de résoudre le problème de Stokes avec second membre mesure. Le problème qui nous intéresse est donc le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \nabla P = \mu \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.2.1}$$

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème d'existence à (4.2.1) avec μ une mesure vectorielle.

Théorème 11 *Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout μ appartenant $(\mathcal{M}(\Omega))^N$, il existe une unique solution faible (u, P) (P est unique à une constante près) au problème (4.2.1) au sens suivant :*

$$u \in V_p = \{v \in (W_0^{1,p}(\Omega))^N \textit{ tel que } \operatorname{div}(v) = 0\},\ \forall p \in \left[1, \tfrac{N}{N-1}\right), \tag{4.2.2}$$

$$P \in L^p(\Omega),\ \forall p \in \left[1, \tfrac{N}{N-1}\right), \tag{4.2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla v_i(x)\ dx = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega v_i(x)\, d\mu_i(x),\ \forall v \in V_q,\ \forall q > N, \tag{4.2.4}$$

$$-\Delta u + \nabla P = \mu \textit{ au sens des distributions dans } \Omega. \tag{4.2.5}$$

Ce résultat d'existence se démontre par un argument de dualité en utilisant les résultats de régularité cités dans la partie précédente. Si l'on reproduit scrupuleusement la démonstration de G. Stampacchia, on peut très bien tomber sur la formulation de la Définition 4.2.1, qui est *a priori* très différente.

On note $L^p_*(\Omega)$ les fonctions de $L^p(\Omega)$ à moyenne nulle, c'est-à-dire

$$L^p_*(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^p(\Omega) \text{ telle que } \int_\Omega \varphi(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Définition 4.2.1 (Solution très faible) *Soit Ω un ouvert de R^N, et soit $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. On appelle solution très faible du problème de Stokes (4.2.1), un couple (u,P) vérifiant*

$$u \in W^{1,q}_0(\Omega) \textit{ et } P \in L^q_*(\Omega), \quad \forall q \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right), \tag{4.2.6}$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u(x).(-\Delta\phi(x) + \nabla\varphi(x))dx - \int_\Omega P(x)\mathrm{div}\,(\phi(x))dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i(x)d\mu_i, \quad \forall(\phi,\varphi) \in (C(\bar{\Omega}) \cap H^1_0(\Omega))^N \times L^2(\Omega) \\ &\qquad\qquad \textit{tel que } -\Delta\phi + \nabla\varphi \in (C^\infty_c(\Omega))^N \textit{ et } \mathrm{div}\,\phi \in C^\infty_c(\Omega). \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Seulement, le résultat de régularité que l'on utilise ici est plus fort ; G. Stampacchia a démontré que les problème de Dirichlet pour une équation elliptique à coefficient discontinue vérifient : si le second membre est dans l'espace de Sobolev $W^{-1,p}(\Omega)$ avec $p > N$, N étant la dimension, alors la solution est continue sur $\overline{\Omega}$. Ici, l'opérateur et l'ouvert sont plus réguliers que dans le contexte de G. Stampacchia. En particulier on a vu que la régularité est obtenue par le théorème ADN, c'est-à-dire que cette fois, si le second membre est dans l'espace de Sobolev $W^{-1,p}(\Omega)$ avec $p > N$, la solution est $W^{1,p}_0(\Omega)$. Ce résultat est effectivement plus fort, et l'argument de dualité permet de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible et non très faible.

Remarque : les appellations sont les mêmes que pour les équations elliptiques. G. Stampacchia a appelé une solution "trés faible" une solution qui est en fait plus forte que la solution dite habituellement "faible" (voir également une comparaison plus approfondie des deux formulations dans l'Annexe A).

Démonstration du Théorème 11 : On considère le problème dual suivant

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \nabla\varphi = f \text{ dans } \Omega \\ \mathrm{div}\,(\phi) = g \text{ dans } \Omega \\ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \text{ et } \displaystyle\int_\Omega \varphi(x)\,dx = 0, \end{cases} \tag{4.2.8}$$

avec $f \in (H^{-1}(\Omega))^N$ et $g \in L^2_*(\Omega)$. On considère l'opérateur T définie par

$$\begin{aligned} &(H^{-1}(\Omega))^N \times L^2_*(\Omega) \to (H^1_0(\Omega))^N \times L^2_*(\Omega) \\ &(f,g) \mapsto (\phi,\varphi) \end{aligned}$$

où (ϕ,φ) est la solution du problème (4.2.8). D'après le Théorème 8, l'opérateur T est bien définie car on a rajouté une condition sur φ pour avoir vraiment son unicité (unique à une constante près).

D'après le Théorème 10, l'opérateur T_p, la restriction de T à $(W^{-1,p}(\Omega))^N \times L^p_*(\Omega)$, est linéaire continue de $(W^{-1,p}(\Omega))^N \times L^p_*(\Omega)$ dans $(W^{1,p}_0(\Omega))^N \times L^p_*(\Omega)$. On peut donc définir son adjoint, que l'on note T^*_p.

On a donc $T^*_p : (W^{-1,p}(\Omega)(\Omega))^N \times (L^p_*(\Omega))' \to (W^{1,p'}_0(\Omega))^N \times (L^p_*(\Omega))'$ qui est linéaire continue, pour tout $p > N$, avec $p' = p/(p-1) < N/(N-1)$.

Il ne reste donc plus qu'à interpréter cet opérateur. Soit $(\mu,\nu) \in (\mathcal{M}(\Omega))^N \times L^{p'}(\Omega)$, pour tout $p > N$, en particulier (μ,ν) appartient aussi à $(W^{-1,p}(\Omega)(\Omega))^N \times (L^p_*(\Omega))'$. Ainsi, $T^*_p(\mu,\nu) = (u,P)$ est l'unique solution de

$$\begin{aligned} &u \in W^{1,q}_0(\Omega) \text{ et } P \in (L^p_*(\Omega))', \quad q \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right), \quad p = \frac{q}{q-1} \\ &\langle (f,g);(u,P)\rangle = \langle (\mu,\nu); T_p(f,g)\rangle, \quad \forall (f,g) \in (W^{-1,p}(\Omega))^N \times L^p_*(\Omega) \end{aligned}$$

L'image de T_p, notée $\operatorname{Im} T_p$, est exactement $(W^{1,p}_0(\Omega))^N \times L^p_*(\Omega)$. En effet, pour tout $(v,Q) \in W^{1,p}_0(\Omega))^N \times L^p_*(\Omega)$, on peut toujours définir un couple (f,g) par, pour tout $w \in (W^{1,p'}_0(\Omega))^N$,

$$\begin{aligned} &g = -\operatorname{div}(v) \text{ presque partout dans } \Omega \\ &\langle f,w\rangle_{(W^{-1,p})^N,(W^{1,p'}_0)^N} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla v_i(x).\nabla w_i(x)\; dx - \int_\Omega Q(x)\operatorname{div} w(x)\, dx. \end{aligned}$$

D'après l'unicité, on a bien $T_p(f,g) = (\phi,\varphi) = (v,Q)$. Ainsi $T^*_p(\mu,\nu) = (u,P)$ est également l'unique solution de

$$\begin{aligned} &u \in W^{1,q}_0(\Omega) \text{ et } P \in (L^p_*(\Omega))', \quad q \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right), \quad p = \frac{q}{q-1} \\ &\sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla \phi_i(x).\nabla u_i(x)\; dx - \int_\Omega \varphi(x)\operatorname{div} u(x)\, dx - \int_\Omega P(x)\operatorname{div}\phi(x)\, dx \\ &\qquad = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i\, d\mu_i + \int_\Omega \nu(x)\operatorname{div}\varphi(x)\, dx, \quad \forall (\phi,\varphi) \in \operatorname{Im} T_p. \end{aligned}$$

Le cas qui nous intéresse est $\nu = 0$. De plus, la fonction φ n'intervient alors que par son gradient, on peut donc supprimer la condition $\varphi \in L^p_*(\Omega)$, la formule est valable pour tout $\varphi \in L^p(\Omega)$. Enfin, d'après l'unicité de la solution (u,P), elle ne dépend pas de $q \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right)$. On a bien obtenue la formulation du Théorème 11. ■

Remarque : la formulation du Théorème 11 permet très vite de comprendre que si la mesure appartient aussi à $(H^{-1}(\Omega))^N$ alors la solution faible du Théorème 11 coïncide avec la solution faible donnée par le Théorème 8, ce qui n'est pas le cas des solution très faible. En particulier, la pression obtenue dans le Théorème 11 est bien la même pression obtenue par le Théorème de De Rham.

Annexe A

Les problèmes à données mesures

On se propose de faire un certain nombre de rappels sur la résolution des équations elliptiques linéaires avec second membre mesure sous forme d'un petit cours. Il s'agit de présenter dans un cadre simple les deux méthodes connues et de s'intéresser tout particulièrement au problème de l'unicité de la solution (et surtout à la non-unicité !).

Introduction

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. On cherche u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Depuis les années 50 et l'apparition des solutions "faibles", ou "variationnelles" on sait résoudre ce type de problème au sens suivant

$$(1)_v \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad , \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour pouvoir utiliser cette formulation, la fonction f doit être assez régulière, le minimum étant f appartient à l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$, que l'on note $H^{-1}(\Omega)$. Avec de bonnes hypothèses sur f, on peut même obtenir de la régularité sur les solutions faibles, et se ramener à des solutions classiques.

La question qui nous intéresse ici est que peut-on faire si les données sont **peu** régulières (c'est-à-dire $f \notin H^{-1}$) et que l'on sort du cadre variationnel ?

Le premier résultat d'existence date de 1965, par G. Stampacchia [56], grâce à une méthode de dualité (valable uniquement dans le cas linéaire du coup). La seconde méthode date de 1989, par L. Boccardo et T. Gallouët et consiste à passer à la limite sur un problème approché.

La question de l'unicité est également intéressante. S. Serrin donne en 1964 un contre exemple pour l'unicité (cf [52]).

Motivations

Les motivations pour étudier ce type de problème sont multiples. La modélisation des puits de forage pour les systèmes pétroliers à l'aide de mesures est certes le premier exemple qui me vient à l'esprit (c'est un peu le sujet de la thèse...), mais d'autres sujets font apparaître des membres peu réguliers. Citons quelques applications :

- **Couplage conduction électrique et conduction thermique.** Lorsqu'on fait passer un courant dans un matériau conducteur électriquement et thermiquement, les équations en température (T) et potentiel électrique (Φ) s'écrivent :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\sigma(x,T)\nabla\Phi(x,T) = 0 & \text{et C.L.} \\ -\mathrm{div}\,(\lambda(x,T)\nabla T) = \sigma(x,T)|\nabla\Phi(x,T)|^2 & \text{et C.L.} \end{cases}$$

  Pour T fixée, on obtient $\Phi \in H^1$, mais alors le terme $\sigma|\nabla\Phi|^2$ est dans L^1 seulement et pas forcément dans H^{-1}. Il y a donc des problèmes pour la résolution de la seconde équation.
  Dans le cas $N = 2$, le Théorème de Meyers (voir Annexe C et le chapitre 1) permet de montrer que le second terme est dans H^{-1}, on retombe alors dans le cadre variationnel. Pour $N = 3$, il n'y a pas de miracle (si $\sigma \neq c^{te}$, et $\lambda \neq c^{te}$), on n'est pas dans le cadre variationnel.
- **Chauffage par induction électromagnétique.** Il s'agit de problème elliptique/parabolique avec données dans L^1 (S.Clain). ($N = 2$ ou 3)
- **Turbulence (modèle $k - \varepsilon$).** Travaux de Lewandovsky.
- **Controlabilité** en météorologie (voir chapitre 4).

A.1 Le cadre variationnel

On définit les hypothèses (H) suivantes :

$$\text{Soit } \Omega \text{ un ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ N \geq 1, \text{ à frontière lipschitzienne.} \tag{A.1.1}$$

$$\begin{array}{c} \text{Soit } A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N} \text{ tel que } \exists\alpha \text{ et } \exists\beta,\ 0 < \alpha < \beta, \\ \forall\xi \in \mathbb{R}^N, A(x)\xi.\xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } |A(x)\xi| \leq |\xi| \text{ p.p. sur } \Omega. \end{array} \tag{A.1.2}$$

Notation : $\mathbb{R}^N$ sera toujours muni de sa structure euclidienne. On note $|\xi|$ la norme de ξ et . le produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$.

On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une solution du problème suivant (sous les hypothèses (H)) :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u(x)) = f(x),\ \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0,\ \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{A.1.3}$$

où f est une fonction donnée. Si on suppose $f \in L^2(\Omega)$ (ou même $f \in H^{-1}(\Omega)$), alors on a l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle de A.1.3), *i.e.* u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{A.1.4}$$

C'est une conséquence du théorème de Lax-Milgram.

Remarque : Si $A(x)$ est symétrique pour presque tout x de Ω et si $f \in H^{-1}(\Omega)$, on peut également poser le problème en terme d'énergie. Alors u est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ E(u) \leq E(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où $E(w) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega (A(x)\nabla w(x)).\nabla w(x)dx - \langle f, w\rangle_{H^{-1},H_0^1}$, $\forall w \in H_0^1(\Omega)$.

Il convient de regarder plus précisement les cas où l'on sort du cadre variationnel.

- **N=1**. On a alors $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ (même dans $C^{0,1/2}(\bar{\Omega})$). Ainsi par dualité $\mathcal{M}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, on est donc toujours dans le cadre variationnel (et on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram).
- **N=2**. Les injections de Sobolev donnent seulement cette fois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$. Donc si $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, on peut identifier f avec un élement de H^{-1}. On reste alors dans le cadre variationnel. En dimension 2, les cas intéressant sont donc $f \in L^1(\Omega)$ ou $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.
- **N≥3**. On a alors : $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$ où $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Ainsi $L^p(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ dès que

  $$p \geq \bar{m} = (2^*)' = \frac{2^*}{2^*-1} = \frac{2N}{N+2}.$$

  Donc si f appartient $L^p(\Omega)$, $p \geq \bar{m}$, on est de nouveau dans le cadre variationnel. Les cas intéressants sont donc $f \in L^p(\Omega)$, $p < \bar{m}$ ou f mesure de Radon, évidemment.

En résumé, les cas intéressant sont, si $N = 2$, $f \in L^1$ ou $f \in (\Omega)$ et si $N \geq 3$, $f \in L^p$, $p < \bar{m}$, ou $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Le problème est alors de savoir quel sens donner à l'équation (1), c'est-à-dire

1) Que signifie "$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f$" ?
2) Quel sens donner à la condition aux limites " $u_{|\partial\Omega} = 0$" ?

Pour 1), on demande que $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{u \in L^1_{\mathrm{loc}} \mid \forall i,\ 1 \leq i \leq N,\ D_i u \in L^1_{\mathrm{loc}}\}$ ($D_i u$ étant considéré comme un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$). Alors $A\nabla u$ a un sens :

$$A\nabla u \in (L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))^N \subset (\mathcal{D}'(\Omega))^N,$$

ce qui permet de définir "$\mathrm{div}\,(A\nabla u)$" dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. De plus, pour f dans $\mathcal{M}(\Omega)$, on peut toujours se restreindre à $\mathcal{D}(\Omega)$ car $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$. Ainsi on peut donner un sens à "$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f$" dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; on cherche donc $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)df(x) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Pour la deuxième question, on définit $W_0^{1,1}(\Omega)$ comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,1}(\Omega)$. On cherche donc u dans $W_0^{1,1}(\Omega)$. Cela donne bien un sens à " $u_{|\partial\Omega} = 0$", grâce à l'existence d'un opérateur trace sur $W^{1,1}(\Omega)$.

Rappel : Il existe un opérateur de trace $\gamma : W^{1,1}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ tel que :
1) γ est linéaire continue ;
2) $\forall u \in W^{1,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\gamma u = u$ pp. pour la mesure $N-1$ dimensionnelle sur $\partial\Omega$
3) $W_0^{1,1}(\Omega)$ =Ker(γ) ;
4) γ est surjectif.

Remarque : Si $1 \leq p \leq +\infty$, $\exists \gamma_p : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$, vérifiant 1), 2) et 3) ; mais si $p > 1$, γ_p est compact non surjectif, alors que γ_1 est surjectif, non compact. On note $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega)$:=Im(γ_p).

Résumé : Sous les hypothèses (H), si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, on dira que u est solution faible de (A.1.3) si et seulement si u vérifie :

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,1}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)df(x), \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases} \tag{A.1.5}$$

Maintenant que l'on a donné un sens aux solutions de (1), il reste à savoir si le problème (A.1.5) admet une solution et si oui, est-ce que cette solution est unique ?

Remarque : On suppose (H). Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. On pourrait commencer pour résoudre (A.1.5) par minimiser une énergie, comme dans le cadre variationnel. Pour toute fonction u de $H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, on définit l'application E par

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (A(x)\nabla u(x)).\nabla u(x)dx - \int_\Omega u(x)df(x).$$

Le problème est que, si f n'est pas dans $H^{-1}(\Omega)$, alors

$$\inf\{E(u) \mid u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})\} = -\infty.$$

Ceci est même vrai pour $f \in L^1(\Omega)$! On ne peut donc pas employer une méthode énergétique.

Il existe 2 méthodes pour montrer l'existence de solutions de (A.1.5) :
1) Stampacchia (1965), par dualité (résultat de régularité pour la solution variationnelle, puis existence pour le problème adjoint) ; le problème de cette méthode est qu'elle n'est valable que dans le cas linéaire.
2) Par approximation (Boccardo-Gallouët, [14], en 1989).

A.2 Lemmes préliminaires

Le lemme fondamental pour tout ce qui suit est sans aucun doute le Lemme de Stampacchia. Il va permettre de prendre comme fonction test dans les formulations faibles des fonctions du type $\varphi(u)$.

Lemme A.2.1 (Stampacchia) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, à frontière lipschitzienne. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $\varphi(0) = 0$. Alors pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, on a $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et, pour tout entier i, $1 \leq i \leq N$,*

$$D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu \text{ pp. sur } \Omega.$$

(Ceci est lourd de sens, en particulier on a que $\varphi'(u)D_iu$ est défini pp.)

Preuve. Nous nous contenterons d'une version moins élaborée de ce lemme, mais suffisante pour la suite.

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R} - \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi' \in L^\infty$ et φ admette une dérivée à gauche et une dérivée à droite en chaque point a_i, respectivement notées $\varphi'_-(a_i) \in \mathbb{R}$ et $\varphi'_+(a_i) \in \mathbb{R}$.

On peut trouver une suite $(\varphi_n)_n \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec
- $\|\varphi'_n\|_\infty \leq M = \|\varphi'\|_\infty$,
- $\varphi_n(s) \to \varphi(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$,
- $\varphi'_n(s) \to \varphi'(s)$, $\forall s \in \mathbb{R} - \{a_1, a_2, ..., a_n\}$,
- $\varphi'_n(a_i) \to \varphi'_+(a_i)$ ou $\varphi'_-(a_i)$ au choix ! (en convolant avec un noyau décentré),
- $\varphi_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Donc il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $C_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers u dans $H^1(\Omega)$ telle que
- $u_m \to u$ presque partout et dans $L^2(\Omega)$ et $|u_n| \leq G$, avec $G \in L^2(\Omega)$.
- $D_iu_m \to D_iu$ presque partout et dans $L^2(\Omega)$ et $|D_iu_n| \leq G_i$, avec $G_i \in L^2(\Omega)$, pour tout $i = 1...N$.

On démontre alors facilement en passant à la limite dans $\varphi_n(u_m)$ quand $m \to \infty$ que $\varphi_n(u) \in H_0^1(u)$ et $D_i\varphi_n(u) = \varphi'_n(u)D_iu$ presque partout (on a pris exactement toutes les hypothèses pour le faire sur φ_n et la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$).

$|\varphi_n(u)| = |\varphi_n(u) - \varphi_n(0)| \leq M|u| \in L^2$ et $|D_i\varphi_n(u)| \leq M|D_iu| \in L^2$. Donc $(\varphi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc supposer (après éventuelle extraction d'une sous-suite) que $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ dans H_0^1-faible et dans L^2.

On a donc $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi_n(u) \to D_i\varphi(u)$ dans L^2-faible. Or $D_i\varphi_n(u) = \varphi'_n(u)D_iu \to \varphi'(u)D_iu$ presque partout, avec $\varphi(a_i)' = \varphi'_{+/-}(a_i)$ selon le choix effectué.

De plus, on a $\varphi'_n(u)D_iu \leq M|D_iu| \in L^2$, donc d'après le théorème de convergence dominée, $D_i\varphi_n(u) = \varphi'_n(u)D_iu$ converge aussi dans L^2 vers $\varphi'(u)D_iu$. On en déduit alors $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ p.p. (peu importe le choix effectué pour les valeurs de $\varphi'(a_i)$, "à gauche" ou "à droite"), ce qui achève la démonstration. ∎

Pour le cas général (φ lipschitzienne), voir [56]. L'idée est la suivante

1) Si $\varphi \in W_c^{1,\infty}$, on pose $\varphi_n = \varphi * \rho_n$ (où ρ est un noyau régularisant). Alors

$$\begin{cases} \varphi_n \to \varphi \text{ partout,} \\ \varphi'_n \to D\varphi \text{ p.p. et } \|\varphi'_n\|_\infty \leq \|D\varphi\|_\infty. \end{cases}$$

On en déduit (exercice) que $\varphi_n(u)$ converge vers $\varphi(u)$ dans H_0^1-faible, et que $\varphi'_n(u)D_iu$ converge vers $D\varphi(u)D_iu$ dans L^2.

Puis on montre que $D\varphi(u)D_iu = \varphi'(u)D_iu$ pp., ...

2) Dans le cas général, φ lipschitzienne, on effectue une troncature pour ce ramener au résultat précédent ...

Remarque : On a nécessairement $D_iu = 0$ pp. sur $\{x \,/\, u(x) = a_j\}$ car le résultat ne dépend pas du choix des valeurs de φ' en a_i. Or il existe toujours une fonction C^1 sur $\mathbb{R} - \{a\}$, C^0 sur $\mathbb{R}$, valant 0 en 0 (et ce $\forall a \in \mathbb{R}$). Il suffit de prendre $\varphi(s) := (s-a)^+$ si $a > 0$, $\varphi(s) := (s-a)^-$ sinon. On en déduit que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \nabla u = 0 \text{ p.p. sur } \{x \in \Omega \mid u(x) = a\}.$$

Lemme A.2.2 (Caractérisation de $W^{-1,p}(\Omega)$) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soit T appartenant à $W^{-1,p}(\Omega)$ (c'est-à-dire $(W_0^{1,p'}(\Omega))'$ par définition, avec $p' = p/p-1$), $1 < p < \infty$, alors il existe une fonction $F = (f_1, ..., f_N) \in (L^p(\Omega))^N$ telle que*

$$\langle T, \varphi \rangle_{W^{-1,p}, W_0^{1,p'}} = \int_\Omega F(x).\nabla\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p'}(\Omega).$$

De plus, on peut choisir F telle que :

$$C_1\|F\|_{(L^p)^N} \le \|T\|_{W^{-1,p}} \le C_2\|F\|_{(L^p)^N}$$

où C_1, C_2 ne dépendent que de Ω (i.e. pas de T, ni des f_i).

Preuve. Soit p, $1 < p < \infty$. On peut munir $W_0^{1,p'}(\Omega)$ de la norme :

$$\|\varphi\|_{W_0^{1,p'}} := \left(\sum_{i=1}^N \|D_i\varphi\|_{p'}^{p'} \right)^{1/p'}$$

qui est équivalente à la norme usuelle grâce à l'inégalité de Poincaré (Ω est borné). Soit maintenant $T \in W^{-1,p}$. Notons $A = \{\nabla\varphi \mid \varphi \in W_0^{1,p'}\} \subset (L^{p'}(\Omega))^N$.
On définit la forme linéaire S sur A par

$$\nabla\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle_{W^{-1,p}, W_0^{1,p'}}.$$

S est bien définie, linéaire continue sur A. On peut donc prolonger S en $\tilde{S}$ sur $(L^{p'})^N$, avec $\|\tilde{S}\| = \|S\|$.
On a $1 < p < +\infty$ donc $(L^{p'})' = L^p$, et aussi $((L^{p'})^N)' = (L^p)^N$. Il existe donc $F \in (L^p)^N$ telle que :

$$\tilde{S}(\Phi) = \langle F, \Phi \rangle_{(L^p)^N, (L^{p'})^N} = \int_\Omega F(x).\Phi(x)dx,\ \forall \Phi \in (L^{p'})^N.$$

Si maintenant $\varphi \in W_0^{1,p'}$, on a :

$$\langle T, \varphi \rangle_{W^{-1,p}, W_0^{1,p'}} = \tilde{S}(\nabla\varphi) = \int_\Omega F(x).\nabla\varphi dx.$$

Enfin, la norme de $\|\tilde{S}\|$ est équivalente à celle de F, ce qui est le résultat souhaité. ■

Remarques :

1) Il est même possible de montrer que la norme duale sur $W^{-1,p}(\Omega)$ peut être définie par

$$\|T\|_{W^{-1,p}} = \inf\{\|F\|_{(L^p)^N} \mid F \in (L^p(\Omega))^N,\ \text{“}T = -\mathrm{div}\, F\text{”}\},$$

à condition, bien-sûr, d'avoir choisi sur $W_0^{1,p'}$ la norme du gradient.
2) Ce lemme est en particulier vrai pour $p = 2$, ce qui donne une caractérisation de $H^{-1}(\Omega)$.

Lemme A.2.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.*
1) Si $f \in L^1(\Omega)$, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élement de $(C_c^\infty(\Omega))^N$ telle que

$$f_n \to f \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \|f_n\|_1 \leq \|f\|_1.$$

2) Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(C_c^\infty(\Omega))^N$ telle que

$$f_n \to f \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega) = (C(\bar{\Omega}))' \text{ faible* et, } \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \|f_n\|_1 \leq \|f\|_{\mathcal{M}}.$$

Preuve. 1) Soit $f \in L^1(\Omega)$.
Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts de Ω, c'est-à-dire $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, et $K_n \subset K_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note χ_{K_n} la fonction caractéristique de K_n. Soit $g_n = \chi_{K_n} f$.
On a alors $g_n \to f$ dans L^1 quand $n \to +\infty$, et, pour tout n, $\|g_n\|_1 \leq \|f\|_1$.
Soit maintenant $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ telle que $\mathrm{supp}\,(\rho) \subset B_1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx = 1$ (noyau régularisant).
On pose $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\rho_p(x) = p^N \rho(px)$.
On choisit enfin une suite p_n de $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n^{-1} < r_n = d(K_n, \Omega^c)$.
On vérifie alors aisément que la suite $f_n = g_n * \rho_{p_n}$ convient.

2) Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Rappel : D'aprés le Théorème de Riesz, on sait qu'il existe une et une seule application σ-additive $m : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ (où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des boréliens de Ω) telle que :

$$\forall \varphi \in C(\bar{\Omega}) \quad \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{M}(\Omega), C(\bar{\Omega})} = \int_\Omega \varphi \, dm$$

En pratique, on confond f et m.
Une application σ-additive réelle peut toujours s'écrire sous la forme $m = m^+ - m^-$, où m^+ et m^- sont deux applications σ-additives positives. Pour cela on pose, pour $A \in \mathcal{R}$,

$$m^+(A) = \sup\{m(B) \in \mathcal{R} \text{ et } B \subset A\} \geq 0 \ ,$$

et $m^- = (-m)^+$. Il reste à vérifier que m^+ (et donc m^- aussi) est σ-additive (exercice).
On pose $|m| = m^+ + m^-$ (donc $|m| : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ est σ-additive), et on peut montrer (exo) que :

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\varphi \in C(\bar{\Omega}),\ \varphi \neq 0} \frac{\langle f, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_\infty} = |m|(\bar{\Omega}).$$

Retour à la démonstration du lemme.
On se sert de la première étape ; il suffit donc de chercher une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\Omega)$, vérifiant pour tout n, $\|f_n\|_1 \leq |f|(\bar{\Omega})$ et $f_n \to f$ quand $n \to +\infty$ dans $(C(\bar{\Omega}))'$ faible*.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une partition $\mathcal{S} = \{K \in \mathcal{R}\}$ de $\bar{\Omega}$ telle que $\mathrm{diam}(K) < \frac{1}{n}$, pour tout K de $\mathcal{S}$. On définit alors f_n par : $f_n(x) = f(K)/\lambda(K)$ où K est l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel que $x \in K$, et où λ désigne la mesure de Lebesgue.
On vérifie alors que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie convient (pour montrer la convergence, on fixe la fonction test $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, puis on utilise son uniforme continuité sur $\bar{\Omega}$ qui est compact). ■

A.3 Existence par approximation

Rappel du problème : On se place sous les hypothèses (H). On cherche u solution de :

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,1}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)df(x), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \end{cases}$$

où f appartient à $\mathcal{M}(\Omega)$.

Idée : Puisque $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, le lemme A.2.3 nous donne une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers f dans $(C(\bar{\Omega}))'$ faible*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait résoudre le problème (A.1.4) avec "$f = f_n$", *i.e.* pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe u_n solution de

$$(1)_v \begin{cases} u_n \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f_n(x)v(x)dx \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Si $v \in C_c^\infty$, on a par construction de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que

$$\int_\Omega f_n(x)v(x)dx \to \int_\Omega v(x)df(x)$$

Le problème est de passer à la limite dans le premier terme ; pour cela, il faut des estimations supplémentaires sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a les lemmes suivants :

Lemme A.3.1 *On suppose (H). Soit $f \in L^2(\Omega)$. Soit u la solution de (A.1.4), alors*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \int_{B_n} |\nabla u|^2 \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

où $B_n = \{x \in \Omega \mid n \leq |u(x)| < n+1\}$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par
– $\phi(x) = -1, \ \forall x \in]-\infty, \ -n-1]$,

– $\phi(x) = x + n,\ \forall x \in [-n-1,\ -n]$,
– $\phi(x) = 0,\ \forall x \in [-n,\ n]$,
– $\phi(x) = x - n,\ \forall x \in [n,\ n+1]$,
– $\phi(x) = 1,\ \forall x \in [n+1,\ +\infty[$.

Soit alors $v = \Phi(u)$. D'après le lemme 2, $v \in H_0^1(\Omega)$, et

$$D_i\Phi(u) = \Phi'(u)D_i(u) = \begin{cases} D_i u & \text{si } x \in B_n \\ 0 & \text{si } x \notin B_n \end{cases}$$

On peut donc prendre v comme fonction test dans (A.1.4), d'où

$$\int_\Omega A\nabla u.\nabla\Phi(u) = \int_\Omega f\Phi(u)dx \leq \int_\Omega |f|dx = \|f\|_1.$$

Or, par définition de Φ,

$$\int_\Omega A\nabla u.\nabla\Phi(u) = \int_{B_n} A\nabla u.\nabla u \geq \alpha \int_{B_n} |\nabla u|^2,$$

par coercitivité de A (d'après (H)). On en déduit bien l'inégalité voulue. ■

Lemme A.3.2 *On suppose (H). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. S'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{B_n} |\nabla u|^2 \leq a$$

alors, pour tout $q \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right[$, il existe une constante K (dépendant de q, a et Ω) telle que

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^q dx \leq K \ \textit{et} \ \int_\Omega |u(x)|^{q^*} dx \leq K$$

où $q^* = \dfrac{qN}{N-q}$.

Preuve. On a $1 \leq q < 2$ et :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^q dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{B_n} |\nabla u|^q dx \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigg(\underbrace{\int_{B_n} |\nabla u|^2 dx}_{\leq a}\Bigg)^{q/2} (\lambda(B_n))^{1-q/2} \ \text{(par Hölder)} \\
&\leq n_0 b + a^{q/2} \sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda(B_n))^{1-q/2}
\end{aligned}$$

où $n_0 \in \mathbb{N}$, $b = a^{q/2}(\lambda(\Omega))^{1-q/2}$. Or, d'après les injections de Sobolev, il existe une constante $C(q, N)$ telle que

$$\left(\frac{1}{C}\int_\Omega |u|^{q^*} dx\right)^{q/q^*} \leq \int_\Omega |\nabla u|^q dx$$

où $q^* = \frac{qN}{N-q}$.
De plus $\displaystyle\int_{B_n} |u|^{q^*} \geq n^{q^*}\lambda(B_n)$, car $|u| \geq n$ sur B_n. On a donc, en appliquant une nouvelle fois Hölder,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{C}\int_\Omega |u|^{q^*}\right)^{q/q^*} &\leq n_0 b + a^{q/2}\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{n^{q^*(1-q/2)}}\left(\int_{B_n}|u|^{q^*}dx\right)^{1-q/2}\\
&\leq n_0 b + a^{q/2}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{B_n}|u|^{q^*}\right)^{\frac{2-q}{2}}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{n^{q^*\frac{2-q}{q}}}\right)^{\frac{q}{2}}\\
&\leq n_0 b + a^{q/2}\left(\int_\Omega |u|^{q^*}\right)^{\frac{2-q}{2}}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{n^{q^*\frac{2-q}{q}}}\right)^{\frac{q}{2}}
\end{aligned}$$

On a $q < \dfrac{N}{N-1}$ donc $2N - Nq > N - q$ ce qui donne finalement $q^*\dfrac{2-q}{q} > 1$. Ainsi la série (du tout dernier terme) est convergente.

– Si $N > 2$, on peut tout de suite conclure car $\dfrac{2-q}{2} < \dfrac{q}{q^*}$. On prend $n_0 = 0$, et on obtient
$$\int_\Omega |u(x)|^{q^*}dx \leq K.$$
– Si $N = 2$, les deux exposants sont les mêmes (on a $\dfrac{2-q}{2} = \dfrac{q}{q^*}$). On choisit donc n_0 assez grand pour que
$$\left(\frac{1}{C}\right)^{q/q^*} - a^{q/2}\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{n^{q^*\frac{2-q}{2}}} > 0,$$
ce qui est possible car on a le reste d'une série convergente. On obtient alors le même résultat.

Dans tous les cas, on a obtenu
$$\int_\Omega |u(x)|^{q^*}dx \leq K.$$
Or, on a
$$\int_\Omega |\nabla u|^q dx \leq n_0 b + a^{q/2}\left(\int_\Omega |u|^{q^*}\right)^{\frac{2-q}{2}}\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{n^{q^*\frac{2-q}{2}}},$$
ce qui permet d'avoir la deuxième majoration. ∎

On déduit de tout cela le théorème suivant :

Théorème 12 ***On suppose*** (H)***. Soit*** $f \in \mathcal{M}(\Omega)$***, alors il existe*** u ***solution de***
$$\begin{cases} u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad , \quad \forall q < \dfrac{N}{N-1} \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)df(x), \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases} \tag{A.3.1}$$

Démonstration. Grâce au lemme A.2.3, on peut choisir une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers f dans $(C(\bar{\Omega}))'$ faible* et telle que $\forall n \in N$, $\|f_n\|_1 \leq \|f\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$.
Pour n fixé on considère u_n la solution de (A.1.4) pour f_n, *i.e.* u_n vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f_n(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right.$$

D'après les lemmes A.3.1 et A.3.2, pour tout $q \in [1, N/(N-1)[$, il existe une constante C, strictement positive, telle que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C.$$

C ne dépend que de q, Ω et $\|f\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$, grâce au choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,q}$, pour tout $q \in [1, N/(N-1)[$.
On considère une suite $(q_l)_{l\in\mathbb{N}}$ qui tend en croissant vers $N/(N-1)$ et à l'aide d'un procédé diagonal on extrait une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une fonction u dans $W_0^{1,q}(\Omega)$-faible, pour tout q de $\left[1, \frac{N}{N-1}\right[$ (cela ne pose aucun problème car les $W_0^{1,q}$ sont "emboîtés" quand q augmente).

Soit maintenant $v \in C_c^\infty(\Omega)$. On peut alors passer à la limite dans chacun des termes de

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f_n(x)v(x)dx.$$

Ainsi on a bien obtenu u solution de (A.3.1). ■

Conclusion : Il existe une solution u de

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad , \quad \forall q < \dfrac{N}{N-1} \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)df(x), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{array}\right.$$

Remarques :
1) Si u est solution de (A.3.1), alors u est solution de :

$$(1)_f \left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)df(x), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{array}\right.$$

Pour $N = 2$, on montrera l'unicité pour (A.3.1), mais on verra qu'il n'y a pas forcément unicité pour (A.1.5).
2) Le problème (A.3.1) est équivalent au problème suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad , \quad \forall q < \dfrac{N}{N-1} \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)df(x), \quad \forall \varphi \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega) \end{array}\right. \tag{A.3.2}$$

En effet, soit $r > N$ et $\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega)$. On a alors (injection de Sobolev) φ qui appartient à $C(\bar{\Omega})$ (on a même $\varphi \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, où $\alpha = 1 - \frac{N}{r}$). Donc φ est intégrable pour la mesure f (car $f \in (C(\bar{\Omega}))'$). On a aussi

$$\nabla\varphi \in (L^r(\Omega))^N \quad \text{et} \quad \nabla u \in (L^{r'}(\Omega))^N \text{ (car } r' = \frac{r}{r-1} < \frac{N}{N-1} \text{ car } r > N)$$

Donc (A.3.2) a bien un sens ($A \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$). Prouvons donc l'équivalence.

Si u solution de (A.3.2) alors u solution de (A.3.1), car $C_c^\infty(\Omega) \subset \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega)$.

Réciproquement, supposons u solution de (A.3.1) (on veut montrer que u est solution de (A.3.2)).
Soit $\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega)$, pour un certain $r > N$. Alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers φ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$. Comme u est solution de (A.3.1), on a, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\int_\Omega A\nabla u\nabla\varphi_n = \int_\Omega \varphi_n df.$$

Par définition de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut passer à la limite dans le terme de droite de cette expression.
Pour le second membre, on utilise que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi uniformément vers φ sur $\bar{\Omega}$, grâce aux injection de Sobolev.
Ainsi pour toute fonction φ de $W_0^{1,r}(\Omega)$, $r > N$, on a

$$\int_\Omega A\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi df.$$

Ceci montre que u est bien solution de (A.3.2).

A.4 Existence par la méthode de dualité

Cette méthode repose sur le théorème de régularité suivant

Théorème 13 (Régularité) ***On suppose*** (H)***. Soit*** f ***appartenant à*** $H^{-1}(\Omega)$***. Soit*** u ***la solution de (A.1.4). Alors, si*** $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ ***pour un certain*** $p > N$***, la solution*** u ***de (A.1.4) appartient à*** $C(\bar{\Omega})$***. De plus, pour tout*** p***, l'opérateur*** T_p ***défini par***

$$T_p : \begin{cases} W^{-1,p}(\Omega) & \to \quad C(\bar{\Omega}) \\ \quad f & \mapsto \quad u \end{cases}$$

est linéaire continue.

Attention, il s'agit bien d'un théorème de régularité (et non d'existence), car si $p > N \geq 2$, $W^{-1,p}(\Omega)$ est inclus dans $H^{-1}(\Omega)$.

Remarques :

1) Soit (H). On suppose de plus que Ω est à bord régulier et que les $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ $(\forall (i,j) \in [1,N]^2)$. On peut montrer (Théorème A.D.N., voir [2] et [3]) que, pour tout p , $2 \leq p < +\infty$, l'application T qui a f associe u, l'unique solution de (A.1.4), est linéaire continue de $W^{-1,p}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
   En particulier, si $p > N$, on a $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, on retrouve le théorème de régularité de Stampacchia.
2) Si on suppose seulement (H), en général, on n'a plus ce résultat. Par contre Stampacchia est encore valable.
   Certes Meyers, voir [42], a démontré qu'il existe un $p_0 > 2$ (dépendant de A et de Ω) tel que, pour tout p, $2 \leq p < p_0$, l'application T définie précédemment est linéaire continue de $W^{-1,p}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, mais on ne sais pas si $p > N$!
   Mieux, on peut même trouver A tel que p_0 soit aussi proche de 2 que voulu.
3) De Giorgi (1957). Sous les hyporhèses (H), si $-\text{div}\,(A\nabla u) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors il existe un certain α tel que : $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ (Ce théorème est partagé avec Nash).

Nous n'allons pas montrer le théorème de Stampacchia, mais la version simplifiée ci-dessous :

Théorème 14 ***Soit*** (H)***, soit*** $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ ***(où*** $N < p < +\infty$***). Alors la solution*** u ***de (A.1.4) appartient à*** $L^\infty(\Omega)$***. De plus, pour tout*** $p > N$***, l'application*** T_p ***qui*** f ***associe*** u ***est linéaire continue de*** $W^{-1,p}(\Omega)$ ***dans*** $L^\infty(\Omega)$***.***

Démonstration. Soit p fixé et $f \in W^{-1,p}(\Omega)$. D'après le lemme A.3.2, il existe une fonction F de $(L^p(\Omega))^N$ telle que $f = -\text{div}\,(F)$ et qu'il existe une constante C (ne dépendant que de Ω et de p) telle que $\|F\|_{(L^p)^N} \leq C\|f\|_{W^{-1,p}}$.

Soit u la solution de (A.1.4), u est aussi solution de :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (A\nabla u).\nabla\varphi = \int_\Omega F.\nabla\varphi, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\varphi = \Psi(u)$, où $\forall s \in \mathbb{R}$, $\Psi(s) = (s-k)^+ - (s+k)^-$.
D'après le lemme 2, $\Psi(u) \in H_0^1(\Omega)$, et $D_i\Psi(u) = \Psi'(u)D_iu = \xi_{A_k}D_iu$ pp., où $A_k = \{|u| \geq k\}$.
On prend $\Psi(u)$ comme fonction test dans (A.1.4), on a alors

$$\int_\Omega A\nabla u\nabla\Psi(u)dx \geq \alpha\int_{A_k}|\nabla u|^2dx,$$

d'après (H) et donc

$$\begin{aligned} \alpha\int_{A_k}|\nabla u|^2 &\leq \int_{A_k} F.\nabla u \\ &\leq \sum_{i=1}^N\int_{A_k} F_iD_iu \text{ si } F = (F_1, ..., F_N)^t \\ &\leq \sum_{i=1}^N \|F_i\|_{L^2(A_k)}\|D_iu\|_{L^2(A_k)} \end{aligned}$$

D'après Hölder, on a $\displaystyle\int_{A_k} F_i^2 \leq \left(\int_{A_k} |F_i|^p\right)^{\frac{2}{p}} \lambda(A_k)^{1-\frac{2}{p}}$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.
On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\alpha\|\nabla u\|^2_{(L^2(A_k))^N} &\leq \sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_p \lambda(A_k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|D_i u\|_{L^2(A_k)} \\
&\leq C\lambda(A_k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|f\|_{W^{-1,p}} \|\nabla u\|_{(L^2(A_k))^N},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(*) \qquad \alpha\|\nabla u\|_{(L^2(A_k))^N} \leq C\|f\|_{W^{-1,p}} |A_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

De plus, il existe $\tilde{C} > 0$ (injection de Sobolev avec $1^* = \dfrac{N}{N-1}$) telle que, pour tout $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq \tilde{C}\|\nabla v\|_{(L^1(\Omega))^N}$$

On utilise ce résultat avec $v = \varphi = \Psi(u)$, d'où

$$\|\Psi(u)\|_{L^{N/(N-1)}(\Omega)} \leq \tilde{C} \int_{A_k} |\nabla\Psi(u)| dx \leq \tilde{C}\|\nabla\Psi(u)\|_{(L^2(\Omega))^N} \lambda(A_k)^{1/2}.$$

En combinant cela avec $(*)$, on trouve

$$\left(\int_\Omega |\Psi(u)|^{\frac{N}{N-1}}\, dx\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_1\|f\|_{W^{-1,p}} \lambda(A_k)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Si $h > k$, on a $A_h \subset A_k$ et $|\Psi(u)| \geq (h-k)$ sur A_h, par définition de Ψ, d'où

$$\begin{aligned}
(h-k)\lambda(A_h)^{\frac{N-1}{N}} &\leq \left(\int_{A_k} |\Psi(u)|^{\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |\Psi(u)|^{\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} \\
&\leq C_1\|f\|_{W^{-1,p}} \lambda(A_k)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$(**) \qquad \lambda(A_h) \leq \frac{C_2}{(h-k)^{\frac{N}{N-1}}} \|f\|^{\frac{N}{N-1}}_{W^{-1,p}} \lambda(A_k)^{\frac{p-1}{p}\frac{N}{N-1}}.$$

On pose $\gamma = \dfrac{N}{N-1}$ et $\beta = \dfrac{p-1}{p} \times \dfrac{N}{N-1}$. On a $\gamma > 1$ et $\beta > 1$ (car $p > N$). $(**)$ devient donc, pour tout (h,k), $0 \leq k < h$,

$$\lambda(A_h) \leq \frac{C_2\|f\|^\gamma_{W^{-1,p}}}{(h-k)^\gamma} \lambda(A_k)^\beta.$$

Posons maintenant $k_0 = 0$ (c'est-à-dire $A_{k_0} = A_0 = \Omega$) et construisons une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda(A_{k_n}) \leq \lambda(\Omega)/2^n$. On raisonne par récurrence. On suppose k_n construit. On veut donc construire k_{n+1}, c'est-à-dire $k_{n+1} > k_n$ tel que

$$\frac{C_2\|f\|^\gamma_{W^{-1,p}}}{(k_{n+1}-k_n)^\gamma}\lambda(A_{k_n})^\beta \leq \frac{1}{2}\lambda(A_{k_n}).$$

On constate qu'il suffit pour cela de prendre

$$k_{n+1} = k_n + (2C_2)^{1/\gamma}\|f\|_{W^{-1,p}}\lambda(A_{k_n})^{\frac{\beta-1}{\gamma}}.$$

La suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et, pour tout n, k_n est majorée par

$$(2C_2)^{1/\gamma}\|f\|_{W^{-1,p}}\left(\lambda(\Omega)\right)^{\frac{\beta-1}{\gamma}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\beta-1}{\gamma}}+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{\beta-1}{\gamma}}\right)$$

La série $\displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{2^p}\right)^{\frac{\beta-1}{\gamma}}$ converge car $\beta > 1$. On appelle S sa limite. Donc il existe k, $k < +\infty$, tel que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers k. Mais on a alors $\lambda(A_k) = 0$, *i.e.* $\|u\|_\infty \leq k < +\infty$. Ainsi u appartient à $L_\infty(\Omega)$.

De plus $k \leq S(2C_2)^{1/\gamma}\|f\|_{W^{-1,p}}$, on a donc

$$\|u\|_\infty \leq C_3\|f\|_{W^{-1,p}},$$

où C_3 ne dépend que de $p > N$, de $\alpha > 0$ et de Ω, ce qui achève la démonstration du théorème (puisque l'on a montré la continuité de l'application T_p). ■

A l'aide de cette version simplifiée du théorème de régularité, on démontre une version simplifiée égalemment du théorème de Stampacchia.

Théorème 15 **(**$f \in L^1$**)** ***On suppose*** (H)***. Soit*** $f \in L^1(\Omega)$***. Alors il existe un et un seul*** u ***solution de :***

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \quad \forall q < \dfrac{N}{N-1} \\ \\ -\displaystyle\int_\Omega u \,\mathrm{div}\,({}^tA\nabla\varphi)dx = \int_\Omega f\varphi dx, \\ \qquad\qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega) \quad \textbf{\textit{tq}} \quad \mathrm{div}\,({}^tA\nabla\varphi) \in C_c^\infty(\Omega) \end{array}\right. \tag{A.4.1}$$

Démonstration. Pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, notons u la solution de (A.1.4) avec ${}^tA$ au lieu de A. On a vu que si $p > N$, l'application T_p qui associe à f la solution u du problème (A.1.4) est linéaire continue de $W^{-1,p}(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$. On peut donc définir l'application T_p^*, l'adjoint de T_p.

T_p^* est définie sur $(L^\infty(\Omega))'$ à valeur dans $(W^{-1,p}(\Omega))' = W_0^{1,p'}$, où $p' = \dfrac{p}{p-1} < \dfrac{N}{N-1}$.

On sait que $L^1(\Omega) \hookrightarrow (L^\infty(\Omega))'$; on notera désormais $T_p^* = (T_p^*)_{|_{L^1(\Omega)}}$ (on confond T_p^* et sa restriction à $L^1(\Omega)$). Ainsi $T_p^* : L^1(\Omega) \to W_0^{1,p'}(\Omega)$ est linéaire continue.

Soit $g \in L^1(\Omega)$. Alors $T_p^*(g)$ est "solution" du problème en un certain sens à préciser. Montrons d'abord que $T_p^*(g)$ ne dépend pas de p.

Soit $v = T_p^*(g)$. Par définition de l'adjoint, v est l'unique solution de :

$$\begin{cases} v \in W_0^{1,p'}(\Omega) \\ \langle v, f\rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}} = \langle g, T_p(f)\rangle_{L^1,L^\infty}, \quad \forall f \in W^{-1,p}(\Omega). \end{cases}$$

v est donc aussi l'unique solution de :

$$\begin{cases} v \in W_0^{1,p'}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega v(x) f(x)\, dx = \int_\Omega g(x) T_p f(x)\ dx, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Si $f \in C_c^\infty(\Omega)$, soit $u = T_p f$. Alors $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $-\mathrm{div}\,(A^t \nabla u) = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On en déduit que v est l'unique solution de :

$$\begin{cases} v \in W_0^{1,p'}(\Omega) \\ \displaystyle -\int_\Omega v(x) \mathrm{div}\,(A^t \nabla u)\, dx = \int_\Omega g(x) u(x)\ dx, \\ \qquad\qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ tq } \mathrm{div}\,(A^t\nabla u) \in C_c^\infty(\Omega). \end{cases}$$

L'unicité de la solution et comme les $W_0^{1,p'}(\Omega)$ sont emboîtés, v ne dépend pas de $p' = \dfrac{p}{p-1} < \dfrac{N}{N-1}$. finalement, v est l'unique solution de

$$\begin{cases} v \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad , \quad \forall q < \dfrac{N}{N-1} \\ \displaystyle -\int_\Omega v(x) \mathrm{div}\,(A^t \nabla u)\, dx = \int_\Omega g(x) u(x)\ dx, \\ \qquad\qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ tq } \mathrm{div}\,(A^t\nabla u) \in C_c^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Cela prouve bien l'existence et l'unicité de la solution de (A.4.1). ■

La version complète du Théorème d'existence d'une "solution très faible" (appellation due à G. Stampacchia) est la suivante

Théorème 16 ***Soit*** (H) ***et soit*** $f \in \mathcal{M}(\Omega)$***. Alors il existe un et un seul*** u ***solution de***

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad , \quad \forall q < \dfrac{N}{N-1} \\ -\displaystyle\int_\Omega u \,\mathrm{div}\,(A^t \nabla\varphi) = \int_\Omega \varphi \, df, \\ \qquad\qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \ \textbf{\textit{tq}} \ \mathrm{div}\,(A^t\nabla\varphi) \in C_c^\infty(\Omega). \end{cases} \tag{A.4.2}$$

Démonstration. Elle est analogue à la précédente, à ceci près qu'il faut utiliser le premier théorème de régularité (celui de Stampacchia).

Remarques. Comparaison entre les 2 méthodes ($f \in \mathcal{M}(\Omega)$).
1) u solution de (A.4.2) implique u solution de (A.3.1).
2) Par la technique d'approximation, on obtient des solutions de (A.3.1) et de (A.4.2).
3) u solution de (A.3.1) n'implique pas u solution de (A.4.2) en général.

Démonstration des remarques.
Pour 3) voir le paragraphe suivant.
Pour 1) et 2), on a $T_p^* : \mathcal{M}(\Omega) \to W_0^{1,p'}(\Omega)$, si $p > N$. Or si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, on sait qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers f dans $\mathcal{M}(\Omega)$ faible*, et telle que, pour tout n, $\|f_n\|_1 \leq \|f\|_{\mathcal{M}}$.
On peut voir (exercice facile) que si $f \in C_c^\infty(\Omega)$, $T_p^* f$ est l'unique solution de (A.1.4).
La technique d'approximation a montré que la suite $(u_n = T_p^* f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u solution de (A.3.1).
Mais on a aussi $T_p^* f_n \to T_p^* f$ dans $W_0^{1,p'}(\Omega)$-faible. En effet, $\forall \varphi \in W^{-1,p}(\Omega)$, on a :

$$\langle T_p^* f_n, \varphi \rangle_{W_0^{1,p'}, W^{-1,p}} = \langle f_n, T_p\varphi \rangle_{\mathcal{M}(\Omega), C(\bar{\Omega})},$$

qui converge vers $\langle f, T_p\varphi \rangle_{\mathcal{M}(\Omega), C(\bar{\Omega})} = \langle T_p^* f, \varphi \rangle_{W_0^{1,p'}, W^{-1,p}}$.
On a donc bien $u = T_p^* f$, pour tout p, $N < p < +\infty$. ■

Retour sur la méthode de Stampacchia. On suppose (H). On a alors les résultats suivant
1. $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe un unique u solution de (A.1.4).
2. $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe un unique u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega {}^t A \nabla u . \nabla \varphi = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

car A vérifie (H) implique que ${}^tA$ le vérifie également. On notera $u = Tf$ la solution de cette équation si $f \in H^{-1}(\Omega)$.

La technique de Stampacchia fonctionne de la manière suivante

1) On montre que l'application T_p, qui associe u à f, est linéaire continue de $W^{-1,p}(\Omega)$ dans $C(\bar{\Omega})$, pour tout p, $p > N$.

   On a donc $T_p^* : \mathcal{M}(\Omega) \to W_0^{1,p'}$ linéaire continue, $\forall p > N$ ($p' = \dfrac{p}{p-1} < \dfrac{N}{N-1}$).

2) Interprétation de T_p^*. Soit $g \in \mathcal{M}(\Omega)$. Par définition de l'adjoint, $v = T_p^* g$ est l'*unique* solution de :

$$(*)_1 \begin{cases} v \in W_0^{1,p'}(\Omega) \\ \\ \langle v, f \rangle_{W_0^{1,p'}, W^{-1,p}} = \langle g, T_p f \rangle_{\mathcal{M}(\Omega), C(\bar{\Omega})}, \quad \forall f \in W^{-1,p}(\Omega). \end{cases}$$

   Mais v est aussi l'*unique* solution de :

$$(*)_2 \begin{cases} v \in W_0^{1,p'}(\Omega) \\ \\ \langle v, f \rangle_{W_0^{1,p'}, W^{-1,p}} = \langle g, T_p f \rangle_{\mathcal{M}(\Omega), C(\bar{\Omega})}, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega). \end{cases}$$

   En effet, on sait que si v est *la* solution de $(*)_1$, il sera forcément solution de $(*)_2$. Soit maintenant w une solution quelconque de $(*)_2$, il s'agit de montrer que $w = v$ pp.
   On a $\langle v, f \rangle = \langle w, f \rangle$, $\forall f \in C_c^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\int_\Omega vf\, dx = \int_\Omega wf\, dx, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega).$$

   Or $v, w \in W_0^{1,p'}(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On en déduit que $v = w$ pp., cqfd.
   Donc, pour tout $p > N$, v est l'unique solution de

$$\begin{cases} v \in W_0^{1,p'}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega v(x) f(x)\, dx = \int_\Omega T_p f(x) dg(x), \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega). \end{cases}$$

   Si $p > q > N$, on a que $W_0^{1,q'}(\Omega) \subset W_0^{1,p'}(\Omega)$. On en déduit, grâce à l'unicité, que $v = T_p^* g$ ne dépend pas de p. Il existe donc un et un seul v solution de :

$$(TFS)_1 \begin{cases} v \in \displaystyle\bigcap_{q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \\ \displaystyle\int_\Omega v(x) f(x)\, dx = \int_\Omega T_p f(x) dg(x), \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Remarque cruciale : $u \in H_0^1(\Omega)\,;\ f = -\mathrm{div}\,(\underbrace{{}^tA}_{\in (L^\infty)^{N.N}} \overbrace{\nabla u}^{\in (L^2)^N}) \in H^{-1}(\Omega)$. Alors

1. pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \displaystyle\int_\Omega ({}^tA \nabla u). \nabla \varphi$. On a donc $u = Tf$.

2. <u>Que signifie $f = -\mathrm{div}\,({}^tA\nabla u) \in C_c^\infty$</u> ?
   Cela signifie qu'il existe une fonction $\tilde{f}$ de $C_c^\infty(\Omega)$ telle que
$$\langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega \tilde{f}\varphi\,dx,\ \forall\varphi.$$
   On a alors $u = T\tilde{f}$ (on confond f et $\tilde{f}$).
   L'unique solution v de $(TFS)_1$ est donc aussi l'unique solution de
$$(TFS)_2 \begin{cases} v \in \displaystyle\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ -\displaystyle\int_\Omega v\,\mathrm{div}({}^tA\nabla u)\,dx = \int_\Omega u\,dg(x), \\ \qquad\qquad \forall u \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) \text{ tq } \mathrm{div}\,({}^tA\nabla u) \in C_c^\infty \end{cases}$$
   Il faut noter que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $f = -\mathrm{div}\,({}^tA\nabla u)$ implique $u = Tf$.
3. Soit $g \in H^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{M}(\Omega)$. Alors
   – Il existe une unique solution v de (A.1.4) (avec $f = g$, v est la "solution faible").
   – Il existe une unique solution $\bar{v}$ de $(TFS)_2$ ($\bar{v}$ est la "solution très faible au sens de Stampachia").

   <u>A-t-on $v = \bar{v}$</u> ? Il suffit de montrer que v est solution de $(TFS)_2$.

   Remarque : $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors
   – $g \in H^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow \exists C\ :\ \langle g, \varphi\rangle \le C\|\varphi\|_{H_0^1}\quad,\quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,
   – $g \in \mathcal{M}(\Omega) \Leftrightarrow \exists C\ :\ \langle g, \varphi\rangle \le C\|\varphi\|_\infty\quad,\quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

   Soit v la solution de (A.1.4), donc v vérifie
$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u.\nabla v\,dx = \langle g, \varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$
   On veut montrer que v est solution de $(TFS)_2$.
   Primo, on a bien
$$v \in H_0^1(\Omega) \subset \bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega).$$
   Soit maintenant $\varphi \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$. Alors, on a
$$\int_\Omega (A\nabla v).\nabla\varphi\,dx = \langle g, \varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega \varphi(x)\,dg(x),$$
   car φ est limite d'une suite d'éléments de C_c^∞ avec convergence à la fois dans $C(\bar{\Omega})$ et dans $H_0^1(\Omega)$ (avec domination). Alors
$$\int_\Omega \nabla v.(A^t\nabla\varphi)\,dx = \int_\Omega \varphi\,dg.$$

Si $f = -\mathrm{div}\,(A^t\nabla\varphi) \in H^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v.(A^t\nabla\varphi)\,dx &= \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \quad \text{d'arès la remarque cruciale}\\ &= \int_\Omega \varphi\,dg.\end{aligned}$$

et ce, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ en posant $f = -\mathrm{div}\,(A^t\nabla\varphi)$.
Finalement v est bien solution de $(TFS)_2$.

A.5 Unicité

On se place sous les hypothèses (H). On a donc montré que pour toute mesure $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, il existe u solution de

$$\begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (A(x)\nabla u(x)).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)df(x), \quad \forall\varphi \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

A-t-on unicité de la solution de (A.3.1) ?

Rappel : (A.3.1) est équivalent à

$$u \in \bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega), \text{ tel que} \quad -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Une démonstration fausse de l'unicité :
(A.3.1) a toujours une solution (cf. le paragraphe 2.2). Cette solution est unique ssi (A.3.1) a une seule solution, ce qui fait que l'on peut se ramener au cas $f = 0$, c'est-à-dire

$$(1)_{ff}^0 \begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (A(x)\nabla u(x)).\nabla\varphi(x)dx = 0, \quad \forall\varphi \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

On veut montrer que u solution de $(1)_{ff}^0$ implique $u = 0$.
Soit B un borélien de Ω. On résout le problème variationnel adjoint avec $f = 1_B \in L^\infty \subset H^{-1}(\Omega)$, *i.e.* on prend v solution de

$$(1)_{v,B}^t \begin{cases} v \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega {}^tA\nabla v.\nabla\varphi dx = \int_B \varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On sait qu'il existe un et un seul v solution de $(1)^t_{v,B}$. On prend $\varphi = v$ dans $(1)^0_{ff}$ et $\varphi = u$ dans $(1)^t_{v,B}$, on obtient donc

$$\int_\Omega A\nabla u.\nabla v\, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_\Omega {}^tA\nabla v.\nabla u\, dx = \int_B u\, dx.$$

Or les premiers termes de ces deux égalités sont égaux entre eux (par définition de ${}^tA$), et on a donc

$$\forall B \text{ borélien de } \Omega, \quad \int_B u\, dx = 0.$$

Il est facile de voir que cette propriété implique $u = 0$ presque partout (il suffit par exemple de l'appliquer à $B = \{u > 0\}$, puis $B = \{u < 0\}$). ■

Ce résultat est faux en général. Il y a deux erreurs dans le raisonnement : les choix que nous avons faits pour les fonctions tests φ étaient inacceptables !

– Dans $(1)^0_{ff}$, il faut $\varphi \in \bigcup\limits_{r>N} W_0^{1,r}$, alors que l'on a seulement $v \in H^1_0(\Omega)$.

– Dans $(1)^t_{v,B}$, il faut $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, alors que l'on a seulement : $u \in \bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$.

Si, “par miracle”, il existe un $r > N$ (pouvant dépendre de B) tel que $v \in W_0^{1,r}(\Omega)$, alors le raisonnement est correct. En effet

– on peut alors prendre $\varphi = v$ dans $(1)^0_{ff}$,

– on peut prendre $\varphi = u$ dans $(1)^t_{v,B}$, car, par densité, on peut prendre φ dans $W_0^{1,r'}(\Omega)$, où $r' = \dfrac{r}{r-1}$. Or $r > N \Rightarrow r' < \dfrac{N}{N-1}$ et on a donc bien $\varphi = u$ dans $W_0^{1,r'}(\Omega)$.

On obtient alors $u = 0$ et donc on a l'unicité de $(1)^0_{ff}$ (et donc aussi de (A.3.1)).

Résumé : On a unicité de (A.3.1) si et seulement si on peut montrer que pour tout borélien B de Ω, il existe $r > N$ tel que la solution v de $(1)^t_{v,B}$ soit dans $W_0^{1,r}(\Omega)$.

A.5.1 Cas d'unicité

Tout est régulier

Le premier cas où il y a quand même unicité pour la formulation (A.3.1) est pour un ouvert Ω ‘a bord régulier et quand les $a_{i,j} \in C^1(\bar\Omega)$. En effet, on a alors le théorème de régularité suivant :

Théorème 17 (Agmon-Douglis-Nirenberg) ***On suppose*** (H)***. On suppose de plus que*** Ω ***est à bord régulier (de classe*** C^2 ***suffit) et que, pour tout*** i, j ***,*** $a_{i,j} \in C^1(\bar\Omega)$***. Soit*** $1 < p < \infty$***. Alors pour tout*** f ***appartenant à*** $L^p(\Omega)$***, il existe*** u ***appartenant à*** $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ ***unique solution de l'équation***

$$-\mathrm{div}\, A\nabla u = f, \ \textit{presque partout sur } \Omega.$$

et u ***vérifie***

$$\|u\|_{W^{2,p}} \le C\|f\|_{L^p},$$

où C ***dépend seulement de*** Ω***,*** A ***et de*** p ***(l'application*** $f \mapsto u$ ***est continue).***

La démonstration de ce théorème est admise (voir [2] et [3]), voir l'Annexe B pour un cas simple.

En particulier si $f \in L^\infty(\Omega)$, on a
- $u \in L^p$, pour tout $p < \infty$.
- $u \in W^{2,p}(\Omega)$, pour tout $p < \infty$.
- $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$.

Ce théorème nous permet d'avoir l'unicité.

Théorème 18 ***On suppose*** (H)***,*** Ω ***à bord régulier et que pour tout*** i, j***,*** $a_i, j \in C^1(\bar{\Omega})$***. Alors il existe une unique fonction*** u ***solution de (A.1.5), et donc de (A.3.1).***

La démonstration est laissée au soin du lecteur.

Unicité dans le cas $N = 2$

Théorème 19 ***On suppose*** (H) ***et*** $N = 2$***. Alors, pour toute mesure*** $v \in \mathcal{M}(\Omega)$***, il existe une unique solution*** u ***de (A.3.1).***

Attention ! Il y a unicté de la solution u de (A.3.1), mais il n'y a pas unicité pour la formulation (A.1.5), c'est le contre-exemple de Serrin présenté dans la partie suivante.

Ce théorème est une conséquence du théorème de régularité de Meyers.

Théorème 20 (Meyers) ***On suppose*** (H)***,*** $N \geq 1$***. Il existe un réel*** p_0***,*** $p_0 > 2$***, tel que, pour tout*** $f \in H^{-1}(\Omega)$***, si*** u ***est la solution du problème (A.1.4), et que*** $f \in W^{-1,p}(B_R)$***, pour*** $p \in [2, p_0[$***, alors*** u ***appartient à*** $W_0^{1,p}(B_R)$ ***et il existe*** $C(p)$ ***tel que***

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq C(p)\|f\|_{W^{-1,p}}.$$

(c'est-à-dire que l'opérateur T_p***, qui a*** f ***associe*** u***, la solution de (A.1.4), est linéaire continue de*** $W^{-1,p}(\Omega)$ ***dans*** $W_0^{1,p}(\Omega)$***.)***

La démonstration de ce théorème est faite dans l'Annexe C.

Remarques :
1) Si Ω est régulier et que, pour tout i, j, $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$, alors pour tout $p < \infty$, T_p est linéaire continu de $W^{-1,p}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (c'est A.D.N. !).
2) T_p est une bijection : $W^{-1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall p$, $2 \leq p \leq p_0$, (en effet, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset H^{1,0}(\Omega)$, on a $f := -\mathrm{div}(\nabla u) \in W^{-1,p}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ et on a bien $T_p f = u$).
3) p_0 dépend de A, et plus particulièrement de α et des $\|a_{i,j}\|_\infty$.
4) Si $p_0 > N$, Meyers donne l'unicité de (A.3.1).

On peut donc maintenant démontrer le résultat d'unicité.

Démonstration du théorème d'unicité.

D'après les remarques précédentes, on cherche à vérifier que pour tout borélien B de Ω, il existe $r > N$ tel que la solution v de $(1)^t_{v,B}$ soit dans $W_0^{1,r}(\Omega)$. D'aprés Meyers, il existe $p_0 > 2$, donc $p_0 > N$ vérifiant bien cette condition ! On a bien démontrer l'unicité. ■

Ceci ne marche que pour $N = 2$, car le théorème de Meyers ne donne que $p_0 > 2$. S'il était possible d'avoir $p_0 > N$, pour certain N, ce raisonnement pourrait encore marcher.

A.5.2 Non-unicité pour (A.3.1) si $N > 2$

On se place tout d'abord dans le cas $N = 2$, avec $\Omega = B_1$, la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Soit $0 < \varepsilon < 1$, Serrin a trouvé un contre-exemple a l'unicité pour le problème suivant

$$(1)_{S,\varepsilon} \; : \; \begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{1 \le q < \frac{2}{1+\varepsilon}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u.\nabla\varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \, df \quad , \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{cases}$$

Proposition A.5.1 (Serrin 1965) *Soit* $\Omega = B_1$, $N = 2$. *Soit* $0 < \varepsilon < 1$. *Alors il existe* A *vérifiant* (H) *tel que*

$$\forall f \in \mathcal{M}(\Omega), \quad (1)_{S,\varepsilon} \textit{a au moins 2 solutions.}$$

Remarques :
1. Par linéarité, on a $(1)_{S,\varepsilon}$ a 2 solutions pour un certain f si et seulement si $(1)_{S,\varepsilon}$ a 2 solutions pour tout $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Il suffit donc de le faire pour $f = 0$.
2. Ceci montre *a fortiori* la non-unicité pour (A.1.5), mais pas pour (A.3.1), car $\dfrac{2}{1+\varepsilon} < \dfrac{N}{N-1} = 2$.

Démonstration
Si $1 \le i \le 2$ et $1 \le j \le 2$, posons :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; , \; a_{i,j}(x) = \delta_{i,j} + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) \frac{x_i x_j}{r^2}$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

$\underline{A = (a_{ij}) \text{ vérifie-t-elle } (H)}$?
Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a $|a_{i,j}(x)| \le 1 + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}$, et donc $\forall (i,j), \|a_{i,j}\|_\infty \le \frac{1}{\varepsilon^2}$.

De plus, A est symétrique et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) \times \frac{1}{r^2} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}}_{=B}.$$

Or B a 2 valeurs propres différentes $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2(x) > 0$, car $\det(B) = 0$ et $\mathrm{trace}(B) > 0$ (le cas $r = 0$ pouvant être négligé). A a donc les 2 valeurs propres suivantes : 1 et $1 + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)\lambda_2(x) > 1$.
On en déduit que A est coercitive, avec $\alpha = 1$.
Donc A vérifie (H) et de plus, pour tout (i,j), $a_{i,j} \in C^\infty(B_1 \setminus \{0\})$.

Notre **but** est de construire une solution non nulle w de $(1)_{S,\varepsilon}$ avec $f = 0$.

Etape 1 : Posons pour tout $x \in B_1 \setminus \{0\}$, $u(x) = x_1 r^{-1-\varepsilon}$. Alors $u \in C^\infty(B_1 \setminus \{0\})$.

1. Montrons que $u \in W^{1,q}(B_1)$, quelque soit q, $1 \le q < \frac{2}{1+\varepsilon}$ et $u \notin W^{1,\frac{2}{1+\varepsilon}}(B_1)$.
   On a $u \in L^2(B_1)$, car

$$\int_{B_1} |u|^2 dx \le \int_{B_1} r \times r^{-1-\varepsilon} dx \le \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{r^{2\varepsilon}} r\, dr\, d\theta < +\infty,$$

car $\varepsilon < 1$, donc $2\varepsilon - 1 < 1$.
Que vaut $D_1 u$? Soit $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle D_1 u, \varphi\rangle &= -\int_{B_1} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_{B_{1/n}^c} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{B_{1/n}^c} \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi\, dx_1\, dx_2 - \lim_{n\to\infty} \int_{\partial B_{1/n}} u\varphi n_{x_1}\, d\gamma
\end{aligned}$$

Pour justifier la dernière égalité, nous allons démontrer que chacun des deux termes converge bien.
Par définition de u, on a $|u\varphi n_{x_1}| \le C_\varphi n^\varepsilon$, et donc

$$\left| \int_{\partial B_{1/n}} u\varphi n_{x_1} \right| d\gamma \le C_\varphi n^\varepsilon \frac{2\pi}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0, \text{ car } 0 < \varepsilon < 1.$$

Pour le premier terme, on a sur $B_1 \setminus \{0\}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = r^{-1-e} + x_1 . \frac{x_1}{r} r^{-2-\varepsilon}(-1-\varepsilon) = r^{-1-\varepsilon} + c_\varepsilon x_1^2 r^{-3-e}.$$

Donc $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right| \le C_\varepsilon r^{-1-\varepsilon}$ qui appartient à $L^1(B_1)$.
On a donc démontrer que $D_1 u = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, et que $D_1 u \in L^q$, $\forall q < \dfrac{2}{1+\varepsilon}$. On peut montrer en outre que $D_1 u \notin L^{\frac{2}{1+\varepsilon}}$.
De manière analogue, on trouve que $D_2 u \in L^q$, pour tout q, $q < \dfrac{2}{1+\varepsilon}$.
On en déduit finalement que
– $u \in W^{1,q}(B_1)$, pour tout q, $1 \le q < \dfrac{2}{1+\varepsilon}$,

– u n'appartient pas à $W^{1,\frac{2}{1+\varepsilon}}(B_1)$.

2. Montrons que $\displaystyle\int_\Omega A\nabla u.\nabla\varphi dx = 0$, $\forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

 a) A, $u \in C^\infty(B_1 \setminus \{0\})$. On peut montrer que, pour tout $x \in B_1 \setminus \{0\}$,

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u)(x) = 0$$

 (il s'agit là de dérivées classiques).

 b) A-t-on $-\mathrm{div}\,(A\nabla u)(x) = 0$ dans $\mathcal{D}'(B_1)$?

 Soit $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$. Comme $\nabla u \in (L^1)^2$, on a

$$\begin{aligned}\int_{B_1} A\nabla u.\nabla\varphi dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{B^c_{1/n}} A\nabla u.\nabla\varphi dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{B^c_{1/n}} -\mathrm{div}\,(A\nabla u)\,\varphi dx + \int_{\partial B_{1/n}} A\nabla u.\bar{n}\,\varphi d\gamma\end{aligned}$$

 où $\bar{n}$ désigne la normale extérieure à $\partial B_{1/n}$. Or $|\varphi A\nabla u.\bar{n}| \le C_{\varepsilon,\varphi} n^{1+\varepsilon}$, ce qui implique

$$\int_{\partial B_{1/n}} |\varphi A\nabla u.\bar{n}| d\gamma \le C_{\varepsilon,\varphi} n^{1+\varepsilon} \times \frac{2\pi}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

 ce qui est insuffisant, mais on peut montrer que $\displaystyle\int_{\partial B_{1/n}} A\nabla u.\bar{n} = 0$ (à voir...).

 On a alors

$$\int_{\partial B_{1/n}} A\nabla u.\bar{n}\,\varphi d\gamma = \int_{\partial B_{1/n}} A\nabla u.\bar{n}\,\underbrace{(\varphi-\varphi(0))}_{\le \tilde{C}/n}\,d\gamma$$

 Et alors

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B_{1/n}} A\nabla u.\bar{n}\varphi\right| d\gamma &\le \int_{\partial B_{1/n}} |A\nabla u.\bar{n}(\varphi-\varphi(0))| d\gamma\\ &\le K\frac{2\pi}{n} n^{1+\varepsilon}\frac{\tilde{C}}{n} = Cn^{\varepsilon-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

 car $0 < \varepsilon < 1$.

En résumé, on a trouvé u tel que
– $u \in W^{1,q}(\Omega)$, pour tout $q < \dfrac{2}{1+\varepsilon}$,
– u n'appartient pas à $W^{1\cdot\frac{2}{1+\varepsilon}}$,
– $\displaystyle\int_\Omega A\nabla u.\nabla\varphi = 0$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Etape 2 : On appelle g la trace de u sur ∂B_1 ($u_{|\partial B_1} = \gamma(u) = g$). Il existe une fonction G dans $H^1(B_1)$ (et même dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$) telle que $G_{|\partial B_1} = g$.
(On peut prendre, par exemple $G(x) = \dfrac{x}{|x|}\varphi(x)$, avec φ une fonction C^∞ telle que $\varphi = 1$ sur $B_2 \setminus B_{1/2}$ et $\varphi = 0$ sur $B_{1/4}$).

On en déduit qu'il existe v solution de

$$\begin{cases} v \in H_0^1(B_1), \\ -\displaystyle\int_{B_1} A\nabla v.\nabla\varphi\,dx = \int_{B_1} A\nabla G.\nabla\varphi\,dx\ , \quad \varphi \in C_c^\infty(B_1). \end{cases}$$

Alors $v+G \in H^1(B_1)$ et $\displaystyle\int_{B_1} A\nabla(v+G).\nabla\varphi\,dx = 0$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$.
On prend alors $w = (v+G)-u$. On constate alors que
– $w \neq 0$ (car $w \notin W^{1,\frac{2}{1+\varepsilon}}$),
– $w \in \bigcap_{q>\frac{2}{1+\varepsilon}} W_0^{1,q}(B_1)$,
– w est solution de $(1)_{S,\varepsilon}$ avec $f=0$.
Ceci termine la démonstration de la proposition. ■

Remarques :
1) Si ε tend vers 0, on a $\alpha = 1$, mais $\beta \to \infty$ (*i.e.* $\|A\|_\infty \to \infty$). Cela fait que “Serrin ne passe pas à la limite”.
2) Dans le cas $N > 2$, il existe $u \neq 0$ solution de $(1)_{S,\varepsilon}$, où $\frac{2}{1+\varepsilon}$ est remplacé par $\frac{N}{N-1} - \varepsilon$ ($\forall\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \dfrac{N}{N-1}$). Mais ce n'est pas un contre-exemple à (A.3.1).

Proposition A.5.2 (Serrin, Prignet) *On suppose $N > 2$ et $\Omega = B_1$. Il existe A vérifiant (H) tel que, pour toute mesure $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, (A.3.1) a au moins* **2** *solutions.*
Démonstration. ($N > 3$; $0 < \varepsilon < 1$)
On prend comme matrice $A(x)$, la matrice définie par bloc

$$\begin{pmatrix} A_s(x) & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{N-2} \end{pmatrix}$$

où $A_s(x)$ désigne la matrice 2×2 de Serrin définie précédemment et Id_{N-2} l'identité de $\mathbb{R}^{N-2}$. D'après ce que l'on vient de faire, l'hypothèse (H) est vérifiée (avec $\alpha = 1$).

Dorénavant, on pose $N = 3$ pour simplifier. On va construire $w \neq 0$ solution de (A.3.1) avec $f = 0$, *i.e.*

$$(1)_{ff}^0 \begin{cases} w \in W_0^{1,q}, \quad \forall q < \dfrac{N}{N-1} = \dfrac{3}{2}, \\ \displaystyle\int_{B_1} A\nabla w.\nabla\varphi\,dx = 0, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(B_1). \end{cases}$$

On pose $u(x) = x_1 \times r^{-1-\varepsilon}$. On a donc $u \in C^\infty(B_1 \setminus D)$, où $D = \{x_1 = x_2 = 0\}$.
Par définition de A, les $a_{i,j}$ sont également dans $C^\infty(B_1 \setminus D)$. Ainsi comme dans la démonstration précédente, $\mathrm{div}\,(A\nabla u) = 0$ partout sur $B_1 \setminus D$.
1) On va montrer que $u \in W^{1,q}(B_1)$, pour tout q, $1 \le q < \frac{2}{1+\varepsilon}$.
Tout d'abord $u \in L^2(B_1)$ car $|u| \le \frac{1}{r^\varepsilon}$. De plus, pour $i \in \{1,2,3\}$, $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, et donc $D_i u \in L^q(B_1)$, pour tout q, $1 \le q < \frac{2}{1+\varepsilon}$ (tout cela se fait comme dans le cas $N = 2$).
On peut montrer également que $u \notin W^{1,\frac{2}{1+\varepsilon}}$ (facile).

2) On montre maintenant que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(B_1), \quad \int_{B_1} A\nabla u.\nabla \varphi \, dx = 0.$$

Là encore, on utilise la même méthode que dans la démonstration de la proposition précédente (on écrit que cette inégrale vaut

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_1 \setminus D_n} A\nabla u.\nabla \varphi \, dx,$$

où $D_n = \{x \;/\; d(x, D) \leq \frac{1}{n}\} = \{r \leq \frac{1}{n}\}$). Le calcul a déjà été plus ou moins effectué précédemment...

On a donc : $\begin{cases} u \in W^{1,q} \quad , \quad \forall q < \dfrac{2}{1+\varepsilon} \\ \displaystyle\int_{B_1} A\nabla u.\nabla \varphi \, dx = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(B_1) \end{cases}$

On choisit maintenant ε tel que $\dfrac{2}{1+\varepsilon} > \dfrac{N}{N-1} = \dfrac{3}{2}$, *i.e.* $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{3}$.

3) $u \in C^\infty(\overline{B_1} \setminus D)$, donc u a une trace sur $\partial B_1 \setminus \{N, S\}$. On pose $g = u_{|\partial B_1} \in C^\infty(\partial B_1 \setminus \{N, S\})$, où N et S sont les deux “ples” de $\partial B_1 = S^2$, *i.e.* $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$.

Remarque : Comme $u \in W^{1,q}(B_1)$, pour tout q, $1 \leq q < \frac{2}{1+\varepsilon}$, il convient de vérifier que, si $\gamma : W^{1,q}(B_1) \to L^q(B_1)$ désigne l'opérateur trace, $\gamma(u) = u$ pp. sur S^2 (la trace et la restriction coïncident).
En effet, pour définir la trace de u, on va trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(B_1)$ qui converge vers u dans $W^{1,q}(B_1)$ et partout sur $B_1 \setminus D$.
On en déduit que $\begin{array}{ll} \gamma(u_n) & \to \gamma(u) \text{ dans } L^q(B_1) \text{ donc pp. pour une sous-suite} \\ \| & \\ u_{n|\partial B_1} & \to u_{|\partial B_1} \text{ partout sur } \partial B_1 \setminus \{S, N\} \end{array}$
On a donc $\gamma(u) = u_{|\partial B_1}$ pp. (pour la mesure 2-dimensionnelle sur $S^2 = \partial B_1$).

<u>Construction de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u>. On prolonge maintenant u par $\tilde{u}$ en dehors de B_1,

$$\tilde{u} = \begin{cases} u \text{ sur } B_1 \\ 0 \text{ sur } B_1^c \end{cases}$$

On pose alors, pour tout n, $n \neq 0$,

$$u_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(y) \rho_n \left(x \left(1 - \frac{1}{n} \right) - y \right) dy,$$

où $\rho_n(x) = n^N \rho(nx) = n^3 \rho(nx)$, avec $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1$.
On constate que si $x \in B_1$, le calcul de $u_n(x)$ utilise $u(z)$ pour $z \in B_1$ seulement.
Et alors, on a

$\rightarrow$ $u_n \in C^\infty(B_1)$ (en fait, u_n est même dans $C^\infty(\mathbb{R}^N)$),
$\rightarrow$ $\forall x \in B_1 \setminus D, \quad u_n(x) \rightarrow u(x)$ (facile),
$\rightarrow$ $u_n \rightarrow \tilde{u}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N$, $u_{n|_{B_1}} \rightarrow u$ dans $L^p(B_1)$,
$\rightarrow$ $u_{n|_{B_1}} \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(B_1)$ (exercice).

On en déduit donc que $\gamma(u) = g = u_{|\partial B_1} \begin{array}{l} \in L^p(\partial B_1) \text{ (trace) }, \forall p < \dfrac{2}{1+\varepsilon} \\ \in C^\infty(\partial B_1 \setminus \{S, N\}) \end{array}$

Question : existe-t-il G dans $H^1(B_1)$ tel que $\gamma(G) = \gamma(u) = g$ pp. sur ∂B_1 ?
Si oui, on conclut comme dans la proposition précédente : on constate qu'il existe v solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in H_0^1(B_1) \\ \displaystyle\int_{B_1} A\nabla v.\nabla\varphi = \int_{B_1} A\nabla G.\nabla\varphi \quad , \quad \forall\varphi \in C_c^\infty \end{array} \right.$$

(cela est dû au fait que l'application $\varphi \mapsto \displaystyle\int_{B_1} A\nabla G.\nabla\varphi$ est en fait un élément de $H^{-1}(B_1)$).
On constate alors que, si $w = v + G - u$, $w \neq 0$, et w est solution de $(1)^0_{ff}$, ce qui achève la démonstration.
Il reste donc à montrer qu'il existe une fonction $G \in H^1(B_1)$ telle que $\gamma(G) = \gamma(u) = g = u_{|\partial B_1}$ pp. (On rappelle que $u(x) = \dfrac{x_1}{r^{1+\varepsilon}}$).

- Première méthode : on fixe x_3, alors $u(.,x_3) \in W^{1,p}(B_r)$, pour tout p, $p < \frac{2}{1+\varepsilon}$ (où B_r désigne la boule de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$). On peut montrer que $u_{|\partial B_1} \in W^{1,p}(S^2)$, pour tout $p < \frac{2}{1+\varepsilon}$. Or $\{\gamma(G) \ / \ G \in H^1(\Omega)\} = H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1) = W^{\frac{1}{2},2}(\partial B_1)$.
  A-t-on $W^{1,p}(S^2) \subset H^{\frac{1}{2}}(S^2)$? (au moins pour tout $p > p_0$ pour un certain $p_0 < 2$, car on peut choisir ε)
  La réponse est **oui**, cf [1]. Donc ici g appartient à $H^{1/2}(S^2)$, *i.e.* il existe $G \in H^1(B_1)$ tel que $\gamma(G) = g$!

- Deuxième méthode : Trouver G explicitement. On rappelle que $g = u_{|\partial B_1}$, où $u(x) = \dfrac{x_1}{r^{1+\varepsilon}}$.
  - 1er essai : $G(x) = \dfrac{x_1}{r^{\frac{1+\varepsilon}{2}}(1-x_3^2)^{\frac{1+\varepsilon}{4}}}$. On a bien $G_{|_{S^2}} = g$ (car si $x \in S^2$, $r^2 = 1 - x_3^2$). Mais après calculs, on s'aperçoit que $G \notin H^1(B_1)$ (plus précisément, $\frac{\partial G}{\partial x_3} \notin L^2(\Omega)$).
  - 2ème essai : $G(x) = \dfrac{x_1}{r^{(1+\varepsilon)\theta}(1-x_3^2)^{(1-\theta)\frac{1+\varepsilon}{2}}}$. On a encore $G_{|_{S^2}} = g$, mais, quel que soit θ, $G \notin H^1(B_1)$!

  On n'a pas trouvé de fonction $G \in H^1$ (de manière explicite), avec $G_{|_{S^2}} = g$...

On a bien terminé la démonstration du théorème. ■

A.5.3 Condition pour obtenir l'unicité

Pour obtenir l'unicité de la solution, on a donc besoin d'introduire une notion supplémentaire, soit sur la mesure f soit dans la formulation, c'est-à-dire un peu "une condition d'entropie". On se placera dans le cas où $N \geq 2$ et $f \in L^1$.

Remarque (Gallouët et Herbin, 1994) : On se rappelle la remarque 1.3.1. On suppose $A = \mathrm{Id}$. Pour prouver l'uncité du problème $-\Delta u = 0$ ($f = 0$), on veut montrer que, pour tout borélien B de $\mathbb{R}^N$,

$$\int_B u(x)dx = 0.$$

Pour cela on s'intéresse au problème adjoint pour $f = 1_B$, c'est-à-dire $-\Delta v = 1_B$. On a alors

$$\int_B udx = \int u1_B dx = \int u(-\Delta v)dx = \int \nabla u.\nabla v dx = \int v(-\Delta u)dx = 0$$

Dans ce calcul on effectue deux intégrations par partie. Si on remplace $A\nabla u$ par $a(\nabla u)$ (cas non-linéaire), on ne pourra faire qu'une intégration par partie !

La méthode classique pour démontrer l'unicité consiste à prendre deux solutions distinctes u et v,

$$(*) \qquad \begin{cases} u \in H_0^1 \\ \displaystyle\int A\nabla u.\nabla\varphi dx = \langle f, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1, \end{cases}$$

$$(**) \qquad \begin{cases} v \in H_0^1 \\ \displaystyle\int A\nabla v.\nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1, \end{cases}$$

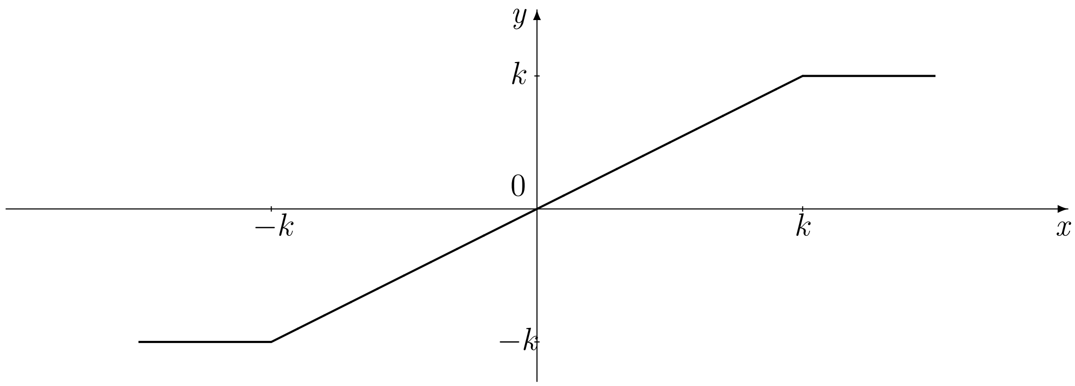
puis on prend $\varphi = u - v \in H_0^1$ et l'on soustrait $(**)$ à $(*)$, on obtient

$$\alpha \int |\nabla(u-v)|^2 \leq \int A\nabla(u-v).\nabla(u-v) = 0,$$

d'où $u = v$ presque partout.
Mais cette technique ne marche pas pour (A.3.1), car si u et v sont des solutions de (A.3.1), on ne peut pas prendre $\varphi = u - v$ comme fonction test, car on a seulement (*a priori*) $u - v \in W_0^{1,q}(\Omega)$, pour tout $q < \frac{N}{N-1}$, alors qu'il faudrait avoir $\varphi \in W_0^{1,r}$ pour un certain $r > N$...

L'idée est de prendre comme fonction test $\varphi = T_k(u - T_k(v))$ où T_k désigne la fonction de troncature suivante

$$T_k(s) = \max(-k, \min(k, s)) = \begin{cases} s & \text{si} \quad |s| \leq k \\ k & \text{si} \quad s > k \\ -k & \text{si} \quad s < -k \end{cases}.$$



On a le théorème suivant :

Théorème 21 (Unicité des solutions entropiques) ***Soit*** (H)***, soit*** $f \in L^1(\Omega)$ ***(ou*** $f \in L^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$***),*** ***(***$N \geq 2$***). On sait qu'alors il existe un et un seul*** u ***solution de (A.3.1) vérifiant***

$$(2) \begin{cases} u \in L^1(\Omega), \quad \forall k \in \mathbb{R}_+ \,, \; T_k(u) \in H_0^1(\Omega), \\ \\ \forall k \geq 0, \; \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \; \displaystyle\int_\Omega A\nabla u . \nabla(T_k(u-\varphi))dx \leq \int_\Omega f T_k(u-\varphi)dx. \end{cases}$$

La démonstration est admise.

Ceci termine cette annexe.

Annexe B

Le Théorème Agmon-Douglis-Nirenberg

On donne ici une version simplifiée du théorème A.D.N. ; on s'intéresse au laplacien sur une boule de rayon R et centrée en zéro. Ainsi on cherche une fonction $u : B_R \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u &=& f, \text{ dans } B_R, \\ u &=& 0, \text{ sur } \partial B_R. \end{array}\right. \tag{B.0.1}$$

où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{ Laplacien de } u,$$

et f est une fonction donnée sur Ω.
La méthode classique de résolution de (B.0.1) s'appuie fortement sur la théorie des espaces de Hilbert (voir Brézis [20], par exemple). Le problème qui nous intéresse dans cette partie est d'obtenir un résultat d'existence et de régularité de solution en dehors de ce cadre.

Théorème 22 (Agmon-Douglis-Nirenberg) ***Soit*** $p \in \mathbb{R}$***,*** $1 < p < \infty$***. Alors pour tout*** f ***appartenant à*** $L^p(B_R)$ ***, il existe*** u ***appartenant à*** $W^{2,p}(B_R) \cap W_0^{1,p}(B_R)$ ***unique solution de l'équation***

$$-\Delta u = f, \ \textit{presque partout sur } B_R.$$

et u ***vérifie***

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C\|f\|_{L^p},$$

où C ***dépend seulement de*** Ω ***et de*** p***.***

La démonstration, que nous ne détaillerons pas, repose essentiellement sur deux idées :

a. Une formule de **représentation explicite** de u à l'aide de la solution fondamentale Γ. Soit u la fonction définie par

$$u(y) = \int_{B_R} -G(x,y) f(x) \; dx,$$

où G est la fonction de Green pour la boule B_R donnée par

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma\big(|x-y|\big) - \Gamma\Big(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\Big), & \text{pour } y \neq 0 \\ \Gamma\big(|x|\big) - \Gamma(R), & \text{pour } y = 0, \end{cases}$$

où $\overline{x} = (R^2/|x|^2)x$ est l'inverse de x par rapport à la boule B_R, pour $x \neq 0$, et où Γ est définie par

$$\Gamma(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{N(2-N)\omega_N} r^{2-N}, & N > 2 \\ \\ \dfrac{1}{2\pi} \log r, & N = 2. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la fonction de Green pour le domaine B_R est donnée par G peut également s'écrire sous la forme suivante

$$G(x,y) = \Gamma\big(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2x.y}\big) - \Gamma\left(\sqrt{\Big(|x||y|/R\Big)^2 + R^2 - 2x.y}\right),$$

qui montre mieux le rôle symétrique de x et de y.
Par construction de G, on a facilement que u vérifie la condition de Dirichlet. On vérifie également que u est solution du problème étudié dans $\mathcal{D}'$. On pose $u = u_2 - u_1$, avec

$$\begin{aligned} u_1(y) &= \int_{B_R} \Gamma\big(|x-y|\big) f(x)\, dx, \\ u_2(y) &= \int_{B_R} \Gamma\Big(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\Big) f(x)\, dx. \end{aligned}$$

L'étude de u_2 ne pose pas de problème car, dans la fonction $\Gamma\Big(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\Big)$, les discontinuités sont rejetées sur la frontière. On a donc

$$D_{ij}u_2(y) = \int_{B_R} D_{ij}\Gamma\Big(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\Big) f(x)\, dx$$

Pour u_1, le problème est un peu plus compliqué à cause de la singularité en zéro. Il est possible de démontrer la formule suivante

$$\begin{aligned} D_{ij}u_1(y) = \int_{B_R} & D_{ij}\Gamma(x-y)\big(f(x) - f(y)\big)\, dx \\ & - f(y) \int_{\partial B_R} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(x)\, ds_x, \ \text{p.p.} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. On pourra, à ce sujet, consulter le livre de D. Gilbarg et N. S. Trudinger, [35].
Il reste donc à étudier la régularité de $D_{ij}u_1$, celle de $D_{ij}u_2$ étant immédiate.

b. Pour surmonter cette difficulté, on utilise la théorie des **intégrales singulières de Calderón-Zygmund** dans les espaces L^p.
On appelle noyau de Calderón-Zygmund, tout noyau $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ défini par

$$K(z) = \kappa\left(\frac{z}{|z|}\right)|z|^{-N},$$

où κ est une fonction définie sur la sphère unité Σ de $\mathbb{R}^N$ satisfaisant les conditions suivantes

$$\int_\Sigma \kappa(x)dx = 0$$
$$|\kappa(\phi) - \kappa(\psi)| \leq \omega(|\phi - \psi|),$$

où ω est une fonction croissante et continue, $\omega(t) \geq t$, $\omega(0) = 0$, et

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt \ < +\infty.$$

On pose

$$K_\varepsilon(z) = \chi_{B_\varepsilon^C}(z)K(z),$$

où $\chi_{B_\varepsilon^C}$ désigne la fonction caractéristique du complémentaire de la boule de centre 0, de rayon ε. On a alors le théorème

Théorème 23 (Calderón-Zygmund) ***Soit*** $p \in \mathbb{R}$***,*** $1 < p < \infty$***. Soit*** K ***un noyau de Calderón-Zygmund. Soit*** f ***appartenant à*** L^p***, alors***

$$f_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(z - u)f(z)\ dz,$$

converge dans L^p ***quand*** ε ***tend vers zéro vers une fonction*** $\tilde{f}$ ***de*** L^p ***et on a***

$$\|\tilde{f}\|_{L^p} \leq A_p\|f\|_{L^p},$$

où A_p ***ne dépend que de*** p***,*** N ***et*** K***.***

Pour la démonstration de ce théorème, voir l'article [21].

Le noyau $D_{ij}\Gamma$ vérifie exactement les hypothèses de ce théorème. En effet, on a

$$D_{ij}\Gamma(x - y) = \frac{1}{N\omega_N}\Big(|x - y|^2\delta_{ij} - N(x_i - y_i)(x_j - y_j)\Big)|x - y|^{-N-2}.$$

On applique alors ce théorème et on trouve que, pour tout (i, j), $D_{ij}u_1$ appartient à $L^p(B_R)$. Ainsi u appartient à $W^{2,p}(B_R)$, ce qui est le résultat désiré. ∎

Annexe C

Le Théorème de Meyers

Le théorème A.D.N. permet de démontrer le résultat de régularité de Meyers pour des équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires à coefficients discontinus avec la condition de Dirichlet. Nous nous contentons de redonner la preuve de Meyers. On rappelle le problème.

On cherche à démontrer l'existence et l'unicité lorsque $f \in W^{-1,p}(B_R)$ de la solution $u \in W_0^{1,p}(B_R)$, pour $p > 2$ bien choisi, du problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u(x)) = f(x), \ x \in B_R, \\ u = 0, \quad \text{sur } \partial B_R. \end{cases} \tag{C.0.1}$$

où A vérifie (H). On suppose de plus que β est tel que

$$\max(\|A(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\ \|A^*(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) \leq \beta, \ \text{pour presque tout } x \in B_R. \tag{C.0.2}$$

où A^* désigne l'adjoint de A.
Il s'agit surtout de montrer la régularité de la solution, car l'existence et l'unicité sont déjà connues dans H_0^1. En effet f appartient à $W^{-1,p}(B_R)$, qui est le dual de $W_0^{1,q}$, avec $q = p/(p-1) \leq 2$, donc en particulier $f \in H^{-1}(B_R)$, et on peut appliquer le théorème classique d'existence et d'unicité dans H_0^1.

Théorème 24 (Meyers) Il existe un réel p_0, $p_0 > 2$, tel que, si u est la solution faible du problème (C.0.1) et $f \in W^{-1,p}(B_R)$, pour $p \in [2, p_0[$, alors u appartient à $W_0^{1,p}(B_R)$ et il existe $C(p)$ tel que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq C(p)\|f\|_{W^{-1,p}}.$$

De plus p_0 dépend seulement de A et de R, et non de f.

Avant de commencer vraiment la preuve, voici quelques rappels et définitions. $\mathbb{R}^N$ sera toujours muni de sa structure euclidienne, on note $|.|$ la norme euclidienne. On définit la norme sur $W^{-1,p}(B_R)$ de la manière suivante : si f appartient à $W^{-1,p}(B_R)$, alors il existe une fonction F dans $(L^p(B_R))^N$ telle que $f = \mathrm{div}\,(F)$. On pose alors

$$\|f\|_{W^{-1,p}(B_R)} = \inf\{\Big(\int_{B_R} |F(x)|^p dx\Big)^{1/p},\ f = \mathrm{div}\,(F)\}.$$

On voit facilement que cette formule définit une norme sur $W^{-1,p}(B_R)$, qui est même égale à la norme usuelle du dual, à condition de mettre comme norme sur $W_0^{1,q}$

$$\|u\|_{W_0^{1,q}} = \Big(\int_{B_R} |\nabla u(x)|^q \, dx\Big)^{1/q},$$

ce que l'on peut faire grâce à l'inégalité de Poincaré (l'ouvert est borné).

Comme on considère une matrice A quelconque (pas symétrique, en particulier) il convient de prendre quelques précautions ; on pose $A_1(x) = (A(x) + A^*(x))/2$ et $A_2(x) = (A(x) - A^*(x))/2$, les parties symétrique et antisymétrique de A, et on définit, pour une constante c positive à choisir,

$$M_1(x) = \frac{A_1(x) + cI}{\beta + c}, \quad M_2(x) = \frac{A_2(x) - cI}{\beta + c},$$

où I désigne l'identité de $\mathbb{R}^N$. D'après l'uniforme ellipticité de A, on a

$$M_1(x)\xi.\xi \geq \frac{A_1(x)\xi.\xi + c|\xi|^2}{\beta + c} \geq \frac{\alpha + c}{\beta + c}|\xi|^2.$$

On pose $\mu = \frac{\alpha+c}{\beta+c}$. On remarque que $\mu \leq 1$ car $\alpha \leq \beta$. On a aussi

$$|M_2(x)\xi|^2 \leq \frac{\beta^2|\xi|^2 + c^2|\xi|^2}{(\beta + c)^2} = \frac{\beta^2 + c^2}{(\beta + c)^2}|\xi|^2,$$

d'après (C.0.2). On pose $\nu^2 = \frac{\beta^2+c^2}{(\beta+c)^2}$. On choisit maintenant c tel que $\nu < \mu$, cela est possible pour $c > \frac{\beta^2-c^2}{2\alpha}$. Ainsi il existe deux réels positifs $\mu > \nu$ tels que

$$M_1(x)\xi.\xi \geq \mu|\xi|^2, \; M_2(x)\xi.\xi \leq \nu|\xi|^2. \tag{C.0.3}$$

On peut maintenant commencer la preuve du théorème.

Preuve. Si u est solution du problème (C.0.1), alors u est aussi solution de

$$\begin{cases} (L_1 + L_2)u &= \overline{f}(x), \; x \in B_R, \\ u &= 0, \;\; \text{sur } \partial B_R. \end{cases}$$

où $L_1 u = -\mathrm{div}\,(M_1(x)\nabla u(x))$, $L_2 u = -\mathrm{div}\,(M_2(x)\nabla u(x))$ et $\overline{f} = \frac{f}{\beta+c}$. Il est clair que $\overline{f}$ est aussi régulière que f. Les opérateurs L_1 et L_2 vérifient, pour tout $p > 1$:

$$\|\Delta + L_1\|_{\mathcal{L}(W_0^{1,p}(B_R);W^{-1,p}(B_R))} \leq 1 - \mu, \; \|L_2\|_{\mathcal{L}(W_0^{1,p}(B_R);W^{-1,p}(B_R))} \leq \nu, \tag{C.0.4}$$

où Δ est le laplacien. En effet, on a pour v dans $W_0^{1,p}(B_R)$,

$$(\Delta + L_1)v = \mathrm{div}\,(g), \quad g(x) = (I - M_1(x))\nabla v.$$

On en déduit que g appartient à $(L^p(B_R))^N$. Ainsi, d'après la définition de la norme sur $W^{-1,p}(B_R)$, et d'après (C.0.3),

$$\|(\Delta + L_1)v\|_{W^{-1,p}(B_R)} \leq \|g\|_{(L^p(B_R))^N} \leq (1-\mu)\|v\|_{W_0^{1,p}(B_R)}.$$

La première partie de (C.0.4) est donc montrée. Pour la seconde partie, c'est encore plus rapide :

$$L_2 v = \operatorname{div}(h),\ \ h(x) = M_2(x)\nabla v,$$

ce qui donne pour les mêmes raisons

$$\|L_2 v\|_{W^{-1,p}(B_R)} \leq \|h\|_{(L^p(B_R))^N} \leq \nu\|v\|_{W_0^{1,p}(B_R)}.$$

On écrit l'équation pour u de la façon suivante :

$$-\Delta u + (\Delta + L_1 + L_2)u = \overline{f}. \tag{C.0.5}$$

D'après le théorème 22, on sait que l'opérateur $-\Delta$ réalise une bijection entre $W_0^{1,p}(B_R)$ et $W^{-1,p}(B_R)$ pour $p > 1$, il s'ensuit que (C.0.5) est équivalente à

$$(\mathrm{Id} + G_p(\Delta + L_1 + L_2))u = G_p\overline{f},$$

où $G_p = (-\Delta)^{-1} : W^{-1,p} \to W_0^{1,p}$, et Id, l'identité de $W_0^{1,p}(B_R)$. Si p est tel que

$$\|G_p(\Delta + L_1 + L_2)\|_{\mathcal{L}(W_0^{1,p}(B_R);W_0^{1,p}(B_R))} < 1, \tag{C.0.6}$$

alors $\mathrm{Id} + G_p(\Delta + L_1 + L_2)$ est une application inversible sur $W_0^{1,p}(B_R)$. Ainsi, si on note H son inverse, on a $u = HG_p\overline{f}$. Dès que f (et par conséquent $\overline{f}$) appartient à $W^{-1,p}(B_R)$, $HG\overline{f}$ appartient à $W_0^{1,p}(B_R)$, et donc u aussi.

Le théorème est donc démontré à condition de prouver l'assertion suivante : il existe $p_0 > 2$ tel que pour tout p dans l'intervalle $[2, p_0[$, on a l'inégalité (C.0.6). On remarque que

$$\begin{aligned}&\|G_p(\Delta + L_1 + L_2)\|_{\mathcal{L}(W_0^{1,p}(B_R);W_0^{1,p}(B_R))}\\ &\qquad \leq \|G_p\|_{\mathcal{L}(W^{-1,p}(B_R);W_0^{1,p}(B_R))}\|\Delta + L_1 + L_2\|_{\mathcal{L}(W_0^{1,p}(B_R);W^{-1,p}(B_R))},\end{aligned}$$

et que

$$\|\Delta + L_1 + L_2\|_{\mathcal{L}(W_0^{1,p}(B_R);W^{-1,p}(B_R))} \leq 1 - \mu + \nu < 1$$

grce à (C.0.4) et (C.0.3). De plus, il est facile de voir que

$$\|G_2\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(B_R);H_0^1(B_R))} = 1.$$

Ainsi, si on arrive à montrer que la norme de G_p est dominée par une fonction continue $\rho(p)$ telle que $\rho(2) = 1$, on aura fini la preuve.

Soit $p_1 > 2$ arbitraire fixé, et soit p dans $[2, p_1[$. on définit, pour h dans $(L^p(B_R))^N$, l'application suivante :

$$\Pi h = \nabla u,$$

où u est l'unique solution dans $W_0^{1,p}(B_R)$ (on utilise encore le théorème ADN) de

$$\begin{cases} -\Delta u &= \operatorname{div}(h), \text{ dans } B_R, \\ u &= 0, \text{ sur } \partial B_R. \end{cases}$$

Ainsi, l'application Π envoie $(L^p(B_R))^N$ dans lui-même. Grâce au théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, si on pose $\omega(p) = \|\Pi\|_{\mathcal{L}((L^p(B_R))^N;(L^p(B_R))^N)}$, on a

$$\omega(p) \leq \omega(p_1)^{1-\theta(p)}\omega(2)^{\theta(p)} = \omega(p_1)^{1-\theta(p)},$$

avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta(p)}{p_1} + \frac{\theta(p)}{2}.$$

Soit maintenant f un élément de $W^{-1,p}(B_R)$. Il existe h dans $(L^p(B_R))^N$ tel que $f = \operatorname{div}(h)$. Cela implique, par définition de G_p et Π,

$$\|G_p f\|_{W_0^{1,p}(B_R)} = \|\Pi h\|_{(L^p(B_R))^N} \leq B_R(p)\|h\|_{(L^p(B_R))^N}.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout h de $(L^p(B_R))^N$ vérifiant $f = \operatorname{div}(h)$, par définition de la norme sur $W^{-1,p}(B_R)$, on a

$$\|G_p f\|_{W_0^{1,p}(B_R)} \leq B_R(p)\|f\|_{W^{-1,p}(B_R)},$$

ce qui donne, si on pose $\rho(p) = \omega(p_1)^{1-\theta(p)}$,

$$\|G_p\|_{\mathcal{L}(W^{-1,p}(B_R);W_0^{1,p}(B_R))} \leq \omega(p) \leq \rho(p).$$

Cela complète donc la preuve du théorème. ■

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Acad. Press (1975).

[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Part I, Comm. Pure Appl. Math., 12, p.623-727 (1959).

[3] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Part II, Comm. Pure Appl. Math., 17, p.35-92 (1964).

[4] H. W. Alt, S. Luckhaus, *quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, Mat. Z., 183 (1983).

[5] H. W. Alt, S. Luckhaus, A. Visintin, *On nonstationnary flow throug porous media*, Ann. Mat. Pura Appl., 136, p.303-316 (1984).

[6] H. W. Alt, E. di Benedetto, *Nonsteady flow of water and oil through inhomogeneous porous media*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 12, p.335-392 (1985).

[7] C. Amrouche, *Propriétés d'opérateurs de dérivation. Application au problème de Stokes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, série I, p.367-370 (1990).

[8] C. Amrouche, V. Girault, *On the existence and regularity of the solution of Stokes problem in arbitrary dimension*, Proc. Japan Acad., 67, série A, p.171-175 (1991).

[9] B. P. Andreianov, *Quelques problèmes de la théorie des systèmes paraboliques dégénérés non-linéaires et des lois de conservation*, Thèse de doctorat soutenue le 20 janvier 2000 à l'Université de France-Comté.

[10] Dominique Azé, *Elément d'analyse convexe et variationnelle*, Ellipse, p221-226 (1996).

[11] J. Bear, Y. Bachmat, *Introduction to modelling of transport phenomena in porous media*, Kluwer Academic Publishers (1990).

[12] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L.Vasquez, *An L^1 theory for nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Pisa, Cl. Sci., 22, p. 241-273 (1995).

[13] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, A. Orsina, *A corrector result for the G-convergence of Dirichlet problems in L^1*, Technical report, Nice (1992).

[14] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations involving Measures Data*, J. of Functional Analysis, vol. 87, n.1, p.149-169 (1989).

[15] L. Boccardo, T. Gallouët, *Strongly Non Linear Elliptic having Natural Growth Terms and L^1 Data*, Nonlinear Analysis, T.M.A., vol. 19, n.6, p.573-580 (1992).

[16] L. Boccardo, T. Gallouët, *Strongly Non Linear Elliptic Equations with measure Data*, C.P.D.E., 17 (3 et 4) (1992).

[17] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, *Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data*, Ann. Inst. Henri Poincaré, AnalyseAnalyse non linéaire, Vol. 13, numéro 5, p.539-551 (1996).

[18] L. Boccardo, T. Gallouët, J. L. Vazquez *Nonlinear Elliptic Equations in $\mathbb{R}^N$ without Growth Restrictions on the Data*, Journal of differential equation, vol. 105, n.2, p.334-363 (1993).

[19] A. Bourgeat, M. Quintard, S. Whitaker, *Eléments de comparaison entre la méthode d'homogénéisation et la méthode de moyenne avec fermeture*, C. R. Acad. Sci., Paris, tome 306, série II, p.463-466 (1986).

[20] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson (1983).

[21] A. P. Calderón, A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math., vol.88, p86-139 (1952).

[22] L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Univ. Padora, 31, p.308-340 (1961).

[23] G. Chavent, J. Jaffre, *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*, Studies in mathematics and its applications, vol. 17, North-Holland Publishing Company (1986).

[24] A. Dall'Aglio, *Approximated solutions of equations with L^1 data. Application to the H-convergence of quasi-linear parabolic equations,* Ann. Mat. Pura Appl., 170, p.207-240 (1996).

[25] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, Ann. Scuola Norm. Pisa (28), p.741-808 (1999).

[26] J. Droniou, *Solving convection-diffusion equations with mixed, Neumann and Fourier boundary conditions and measures data, by a duality method*, Advances in Diff. Equ., Volume 5 (10-12), p.1341-1396 (2000).

[27] J. Droniou, T. Gallouët, *A uniqueness result for quasilinear elliptic equations with measures as data*, Accepté pour publication dans "Rendiconti di matematica".

[28] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, coll. Studies in Advanced Mathematics (1992).

[29] R. Eymard, T. Gallout, R. Herbin, *Finite Volume Methods*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII, 2000, p. 723-1020. Editors : P.G. Ciarlet and J.L. Lions.

[30] R. Eymard, T. Gallout, R. Herbin, A. Michel, *Convergence of a finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations*, Accepté pour publication dans "Numer. Math.".

[31] P. Fabrie, T. Gallouët, *Modeling wells in porous media flows*, M3AS, vol. 10, No. 5, p.673-709 (2000).

[32] G. Gagneux, M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, Mathématiques et Applications 22, Springer-Verlag (1996).

[33] T. Gallouet, R. Herbin, *Existence of a solution to a coupled elliptic system*, Appl. Math. Lett., 7 (2), p.49-55 (1994).

[34] T. Gallouët, A. Monier, *On the regularity of solutions to elliptic equations*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 19, Roma, p.471-488 (1999). .

[35] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, seconde édition, Springer (1983).

[36] K. Gröger, *A $W^{1,p}$-estimate or solutions to mixed boundary value problems for second order elliptic differential equations*, Springer-Verlag, Math. Ann. 283, p.679-687 (1989).

[37] D. Jerison, C.E. Kenig, *The Neumann problem on Lipschitz domains*, Bull. Amer. Math. Soc., 4, 203-207 (1981).

[38] D. Jerison, C.E. Kenig, *Boundary value problems on Lipschitz domains*, in "Studies in Partial Differential Equations" (W. Littmaan, Ed.), Studies in Mathematics, N.23, p.1-68, Math. Assoc. Amer., Washington DC (1982).

[39] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, AMS (1968).

[40] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod (1969).

[41] C.-M. Marle, *Multiphase flow in porous media*, Edition Technip. Paris (1981).

[42] N.G. Meyers, *An L^p estimate for the gradient of solution of second order divergence equations*, Ann. SC. Norm. Sup. Pisa, 17, p.189-206 (1963).

[43] F. Murat, *H-Convergence, Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'Université d'Alger 1977/78.*

[44] F. Murat, *A survey on compensated compactness*, Contribution to modern calculus of variations, ed. by L. Cesrai, Pitman Research Notes On Math., Longman, Harlow (1987).

[45] F. Murat et L. Tartar, *H-Convergence*, Topics in mathematical modeling of composite materials, ed. par R.V. Kohn, Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser, Boston (1994).

[46] J. Nečas, *Equations aux dérivéees partielles*, Presses de l'université de Montréal (1966).

[47] F. K. Odqvist, *Uber die randwertaufgaben der hydrodynamik zäher flussigkeiten*, Math. Zeitschr., 32 (1930).

[48] A. Prignet, *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures*, Rend. Mat. Appl., 15, p.321-337 (1995).

[49] A. Prignet, *Conditions aux limites non homogènes pour des problèmes elliptiques avec second membre mesure*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, 6, p.297-318 (1997).

[50] G. de Rham, *Variétés Différentiables*, Hermann (1960).

[51] G. Savaré, *Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains*, Journal of Functionnal Analysis, 152, p.176-201 (1998).

[52] J.Serrin, *Pathological solutions of elliptic differential equations*, Ann. Scuola Norm. Pisa, p.385-387 (1964).

[53] J. Simon, *Régularité de la composée de deux fonctions et applications.*, Boll. Un. Mat. Ital. B(5) 16, n. 2, p.501-522 (1979).

[54] J. Simon, *Compact set in* $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura. Appl., IV, 146, p.65-96 (1987).

[55] S. Spagnolo, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 22, p.571-597 (1968).

[56] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol 15, p.189-258 (1965).

[57] L. Tartar, *Cours Peccot au Collège de France*, mars 1977.

[58] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Heriot-Watt Symposium, Vol IV, Pitman, New York (1979).

[59] R. Temam, *Navier-Stokes Equations ; Theory and Analysis.* North-Holland, Amsterdam (1985).

[60] S. Whitaker, *Flow in porous media II : the governing equation for immiscible two phase flow*, Transport in porous media, 1, 2, p.125 (1986).